

Licence de Mécanique et de Technologie
Année L3

Science des Matériaux
(LA 314)

Sylvie Pommier

2005-2006

TABLE DES MATIERES

1	Introduction.....	5
2	Etats, Liaisons, Structures et Comportement thermo-élastique.....	9
2.1	Les états de la matière.....	9
2.2	Etat Solide, liaisons.....	10
2.3	Cristallisation.....	11
2.3.1	Le Cristal Parfait.....	12
2.3.2	Zones amorphes, zones cristallisées.....	14
2.4	Elasticité.....	15
2.4.1	Modèle moléculaire.....	15
2.4.2	Modèle macroscopique.....	16
2.5	Dilatation thermique.....	20
2.5.1	Modèle moléculaire.....	20
2.5.2	Modèle macroscopique.....	21
2.6	Thermo-élasticité des matériaux hétérogènes ou composites.....	22
2.7	Résumé.....	25
2.8	Problèmes.....	26
2.8.1	Thermo-élasticité : Choix de matériaux pour la dérive de l'A380.....	26
2.8.2	Thermo-élasticité : étude d'un matériau composite stratifié.....	30
2.8.3	Thermo-élasticité et conduction thermique : Aubes de turbines revêtues.....	32
2.8.4	Dilatation Thermique : étude d'un système de compensation thermique.....	35
3	Comportement visqueux, Exemple des matériaux polymères.....	39
3.1	Introduction.....	39
3.2	Le Comportement Visqueux.....	39
3.2.1	La viscosité d'un matériau.....	39
3.2.2	Méthodes de Caractérisation.....	41
3.2.3	Modèles Rhéologiques.....	44
3.2.4	Loi de comportement.....	46
3.3	Structure des matériaux polymères à différentes échelles.....	48
3.3.1	Généralités.....	48
3.3.2	Echelle moléculaire.....	48
3.3.3	Echelle macromoléculaire.....	51
3.3.4	Echelle morphologique.....	53
3.4	Relations structure-propriétés.....	56
3.4.1	Réticulation et propriétés thermo-élastiques de base (E, ρ, T_f, α).....	56
3.4.2	Cristallisation et propriétés thermo-élastiques de base (E, ρ, T_f, α).....	58
3.4.3	Elasticité caoutchoutique.....	58
3.4.4	Polymères amorphes et viscosité.....	62
3.5	Résumé.....	67
3.6	Problèmes.....	68
3.6.1	Essais mécaniques et comportement visco-élastique.....	68
3.6.2	Application, tenue en service d'une butée en Nylon Technyl.....	69
3.6.3	Mélanges de polymères : Synthèse d'un matériau à fort coefficient d'amortissement.....	70
4	Comportement plastique, Exemple des matériaux métalliques.....	72
4.1	Introduction.....	72
4.2	Le comportement élastoplastique.....	72

4.2.1	Méthode de caractérisation.....	72
4.2.2	Analyse d'un essai de traction.....	73
4.2.3	Analyse d'un essai de traction-compression	76
4.2.4	Modèles rhéologiques	78
4.3	Structure des matériaux métalliques à différentes échelles	80
4.3.1	Echelle atomique	80
4.3.2	Structure intra-granulaire	81
4.3.3	Echelle des grains ou microstructure.....	83
4.3.4	Macrostructure	84
4.4	Relations structure propriété	86
4.4.1	Plans de glissements et contrainte d'écoulement	86
4.4.2	Prise en compte des écrouissages.....	94
4.4.3	Dislocations, effet de taille de grain et viscosité.....	97
4.5	Résumé.....	107
4.6	Problèmes.....	108
4.6.1	Matériau biphasé et écrouissage cinématique.	108
4.6.2	Dépouillement d'un essai de traction simple.....	112
5	Rupture par fluage.....	115
5.1	Introduction	115
5.2	Résistance d'un matériau au fluage.....	115
5.2.1	Méthodes de caractérisation.....	115
5.2.2	Analyse d'un essai de fluage.....	116
5.2.3	Endommagement de fluage.....	118
5.3	Mécanismes physiques d'endommagement par fluage	118
5.3.1	Auto-diffusion, montée des dislocations.....	118
5.3.2	Fluage-dislocation	119
5.3.3	Fluage diffusion aux joints de grains	120
5.3.4	Fluage diffusion en volume.....	121
5.3.5	Effet de la taille des grains.....	122
5.3.6	Cartes de mécanismes d'endommagement.....	122
5.4	Etudes de cas.....	123
5.4.1	Introduction.....	123
5.4.2	Evolution de la microstructure d'une aube de turbine.....	124
5.4.3	Superaliage N18 pour disques de turbine.....	126
5.5	Résumé.....	129
5.6	Problèmes.....	130
5.6.1	Fatigue thermique d'une aube de turbine	130
6	Rupture par fatigue.....	132
6.1	Introduction.....	132
6.2	Essais de fatigue conventionnels.....	132
6.2.1	Courbes de Wöhler, courbes S-N.....	132
6.2.2	Mécanismes d'endommagement.....	134
6.2.3	Essais complémentaires	141
6.3	Eléments de mécanique linéaire de la rupture	143
6.3.1	Introduction.....	143
6.3.2	Modes de fissuration.....	144
6.3.3	Facteur d'intensité des contraintes	145
6.4	Analyse d'un essai de fissuration par fatigue	146
6.4.1	Régimes de fissuration par fatigue, Loi de Paris.....	146
6.4.2	Origine physique des trois régimes de fissuration par fatigue.....	147
6.5	Résumé.....	149

6.6	Problèmes	150
6.6.1	Choix de matériaux pour la réalisation d'un réservoir sous pression :	150
7	Rupture fragile, rupture ductile	155
7.1	Introduction	155
7.2	Essais de rupture	156
7.2.1	Essais d'endommagement et rupture	156
7.2.2	Essais de fissuration	158
7.3	Mécanismes d'endommagement	162
7.3.1	Rupture fragile	162
7.3.2	Rupture ductile	164
7.4	Eléments de modélisation	166
7.4.1	Endommagement localisé, Théorie du maillon faible	167
7.4.2	Endommagement diffus, Théorie de Kachanov	173
7.5	Résumé	177
7.6	Problèmes	178
7.6.1	Les aventures de Tintin	178
8	Annexes	181
8.1	Quelques rappels de mécanique des milieux continus.	181
8.1.1	Tenseur des contraintes	181
8.1.2	Tenseur des déformations	183
8.1.3	Puissance de déformation	184
8.2	Quelques rappels de physique	184
8.3	Le facteur d'intensité des contraintes	187
8.3.1	Méthode de résolution de problèmes plans en élasticité isotrope	187
8.3.2	Fonction de Westergaard	189
8.3.3	Singularité en pointe de fissure	189
8.3.4	Facteur d'intensité des contraintes	191
8.3.5	Quelques expressions du facteur d'intensité des contraintes	192

1 INTRODUCTION

◇ Objectifs

La maîtrise de nouveaux matériaux a été à l'origine de révolutions dans l'histoire des technologies. Les âges de la préhistoire sont d'ailleurs définis par les matériaux employés, âge de la pierre, âge du bronze, du fer.

Aujourd'hui, le nombre de matériaux ou en tout cas le nombre de références est considérable et en constante augmentation. En effet, la science des matériaux permet de concevoir de nouveaux matériaux adaptés à chaque nouvelle application. On pourra distinguer deux grandes catégories de matériaux :

(1) les matériaux de structure, qui seront l'objet de ce cours et qu'on utilise essentiellement pour leurs capacités à soutenir des sollicitations mécaniques et thermiques.

(2) les matériaux fonctionnels, qu'on utilise pour leurs propriétés physiques, telles que conductivité ou semi-conductivité électrique, magnétisme, propriétés optiques ...

Certains matériaux se trouvent à la frontière entre les applications mécaniques et physiques, comme par exemple les matériaux piézo-électriques qui délivrent un effort lorsqu'on les soumet à une différence de potentiel électrique.

Cependant, même en se restreignant aux matériaux de structure, le nombre de matériaux existant reste considérable. L'objectif de ce cours n'est donc pas de les étudier de manière exhaustive, mais de se donner les éléments de compréhension permettant de trouver pour une application particulière la solution matériau la plus adaptée.

Une solution matériau pour une application comprend trois volets, le matériau constituant le composant, le procédé de mise en œuvre du composant, et la tenue en service de ce composant. Nous nous limiterons à l'étude de la relation entre le matériau et sa tenue en service, sans étudier la mise en forme et plus généralement la relation entre le procédé et le matériau qui sera l'objet de modules de spécialité en M1.

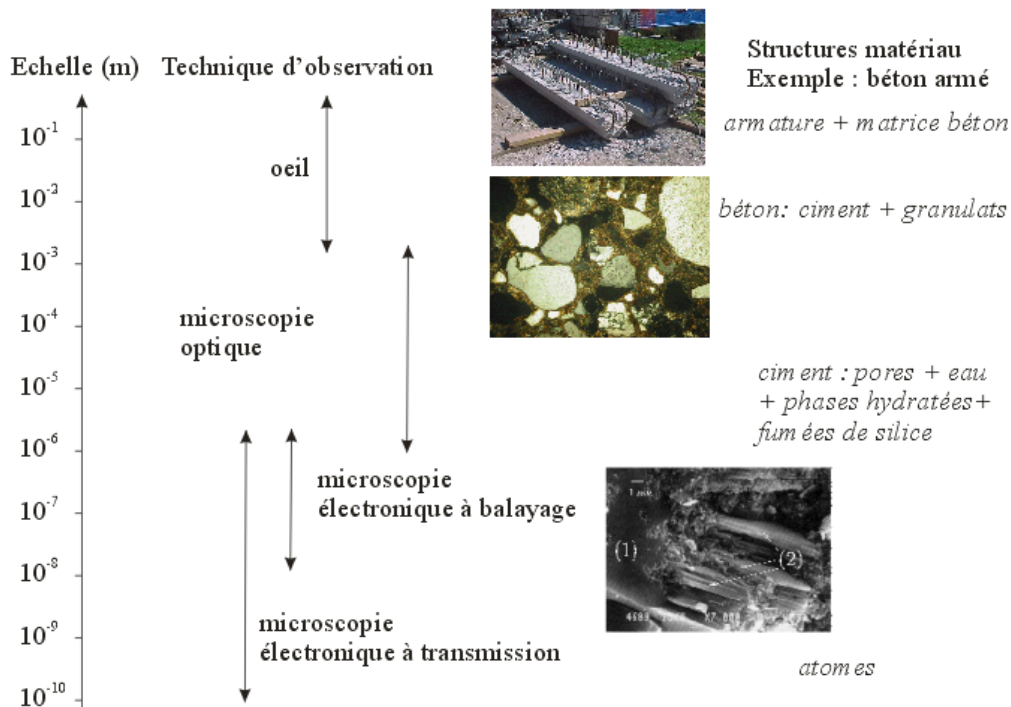
Le cours de cette année concernera donc les propriétés mécaniques (comportement thermo-élastique, viscosité, plasticité, rupture fragile, ductile, par fluage et par fatigue) des grandes familles de matériaux. L'accent sera mis sur les relations entre la structure du matériau et ses propriétés mécaniques. Ce lien est souvent le résultat d'un changement d'échelle entre le comportement des éléments constitutifs de la microstructure (échelle « micro ») et le comportement mécanique à l'échelle macroscopique (échelle « macro »), nous procéderons donc généralement à des changements d'échelle.

◇ Notion de volume élémentaire représentatif du matériau

En effet, on caractérise les propriétés d'un matériau à **une échelle donnée**. A cette échelle le matériau est considéré comme homogène et continu. Si l'échelle à laquelle est caractérisée la propriété est comparable à l'échelle de l'hétérogénéité interne du matériau, les résultats seront alors **dispersés**. Il faudra réaliser de nombreux essais pour déterminer une valeur moyenne et une distribution statistique de la propriété.

Prenons un exemple très simple, la détermination de la masse volumique du béton armé. La masse volumique peut-être caractérisée à l'échelle métrique. Elle est fonction de la fraction volumique de béton multipliée par la masse volumique du béton et de la fraction volumique d'acier multipliée par la masse volumique de l'acier. A une échelle inférieure, centimétrique, la masse volumique du béton sera fonction de la fraction volumique de granulats et de pâte cimentaire. Et ainsi de suite pour les échelles inférieures...

Ainsi, on peut optimiser une propriété du matériau à une échelle donnée en fonction de la connaissance du comportement de ses constituants. Cette démarche de changement d'échelle, tantôt qualitative, tantôt quantitative est couramment employée en science des matériaux.



Chaque propriété est donc associée à une échelle caractéristique (volume ou surface élémentaires représentatifs) au delà de laquelle elle peut être considérée comme une moyenne représentative du matériau. A chaque échelle sont associés des moyens de mesure et d'observation adaptés.

Moyennes pour un volume

Masse volumique

Coefficient de dilatation thermique

Capacité calorifique

Conductibilité thermique

Coefficient de viscosité

Module d'élasticité, module de Young

Coefficient de Poisson

Limite d'élasticité

Contrainte à rupture

....

Moyennes pour une surface

Emissivité

Tension de surface

Coefficient de frottement

....

◇ Familles de matériaux

L'objectif est donc d'établir les relations entre les propriétés mécaniques à une échelle donnée et la structure du matériau à une échelle inférieure. Le cours est organisé par classe de comportement mécanique (thermo-élasticité, viscosité, plasticité, rupture fragile, ductile par fluage ou par fatigue) et illustré à chaque fois à l'aide d'une ou plusieurs familles de matériaux.

En effet, les matériaux de structure peuvent être classés en quatre grandes familles, selon la nature des liaisons entre les atomes, dont on peut résumer les propriétés principales comme suit :

(1) Les métaux (liaisons métalliques). On les obtient soit par réduction à haute température de leurs oxydes en présence de carbone (ex. fer) ou par électrolyse à haute température (ex. aluminium). Ce sont les matériaux les plus employés pour les applications structurales et pour l'essentiel des métaux ferreux (90% ferreux, les non-ferreux étant des alliages de Al, Cu, Ni et Ti). Ils sont capables de se déformer de manière permanente (ductiles) ce qui permet de réaliser des opérations de mise en forme par déformation plastique (emboutissage, forge, estampage...) ou d'assemblage par déformation plastique (rivetage, clinchage...). Par ailleurs les matériaux métalliques sont denses, et bons conducteurs thermiques et électriques.

(2) Les céramiques (liaisons ioniques, solides inorganiques) Ce sont les matériaux les plus anciens et les plus couramment utilisés en Génie Civil (pierre, brique, verre...). On peut (ex. béton) souvent les mettre en oeuvre à l'état pâteux. Ils ne deviennent fragiles qu'après la prise. Ces matériaux sont résistants à l'abrasion, mais pas aux chocs, moins denses que les métaux, isolants thermique et électrique, généralement poreux et fragiles.

(3) Les polymères (liaisons covalentes + van der Waals ou Hydrogène, solides organiques). Ces matériaux sont récents. Ce sont de larges macromolécules organiques, comme par exemple le polyéthylène $-(C_2H_4)_n-$ dont le nombre de monomères n varie entre 100 et 1000 et la masse molaire de $M=10^0..10^3$ kg/mol. Les matières plastiques ont l'avantage de pouvoir être mises en forme par déformation plastique ou injection à l'état liquide. Elles peuvent être thermoplastiques (recyclables et ductiles, comme les métaux) ou thermodurcissables. Elles sont en général mauvais conducteurs thermique et électrique et très peu denses.

(4) Les composites et matériaux structuraux, ce sont des combinaisons hétérogènes de matériaux issus de ces trois familles, mais dont la structure est définie en fonction de l'application (béton armé, composite carbone-epoxy etc...) ou bien se développe naturellement sous l'effet des sollicitations mécaniques ou thermique (ex. bois : fibres de lignine dans une matrice de cellulose, ou métaux texturés par déformation plastique intense).

Le Tableau 1 présente quelques ordres de grandeurs des valeurs moyennes et des fourchettes de quelques propriétés par grande famille de matériaux.

Tableau 1 : Ordres de grandeurs de propriétés selon la famille de matériau

Propriété	Métaux	Céramiques	Polymères
Densité ρ [kg/m ³]	8000 (2000..22000)	4000 (2000..18000)	1000 (900..2000)
Dilatation thermique α [1/K]	$10 \cdot 10^{-6}$ ($1 \cdot 10^{-6} .. 100 \cdot 10^{-6}$)	$3 \cdot 10^{-6}$ ($1 \cdot 10^{-6} .. 20 \cdot 10^{-6}$)	$100 \cdot 10^{-6}$ ($50 \cdot 10^{-6} .. 500 \cdot 10^{-6}$)
Capacité calorifique c_p [J/(kg·K)]	500 (100..1000)	900 (500..1000)	1500 (1000..3000)
Conductivité thermique k [W/(m·K)]	100 (10.. 500)	1 (0.1.. 20)	1 (0.1.. 20)
Température de fusion ou de transition vitreuse T_m [K]	1000 (250..3700)	2000 (1000..4000)	400 (350..600)
Module d'élasticité, module de Young E [GPa]	200 (20..400)	200 (100..500)	1 ($10^{-3} .. 10$)
Coefficient de Poisson	0.3 (0.25..0.35)	0.25 (0.2..0.3)	0.4 (0.3..0.5)
Contrainte à rupture σ_Y [MPa]	500 (100..3500)	100 (10..400 tract.) (50..5000 compr.)	50 (10..150 tract.) (10..350 compr.)
Dureté	Moyenne	Haute	Basse
Usinabilité	Bonne	Très mauvaise	Très Bonne
Résistance à l'impact	Bonne	Mauvaise	Très Mauvaise
Résistance au fluage thermique	Moyenne	Excellente	Très mauvaise
Conductivité électrique	Haute	Très faible	Très faible
Résistance à la corrosion	Moyenne	Excellente	Bonne

◇ *Sources bibliographiques*

- Matériaux (Tomes 1 et 2) , Michael F. Ashby, Davis R.H. Jones, Dunod, 1991
- Les techniques de l'ingénieur.
- Physique de l'état solide, Charles Kittel, Dunod, 1983
- Mécanique des matériaux solides, Jean Lemaître, Jean louis Chaboche, Dunod, 1996
- Matériaux Polymères, Relation Structure-Propriétés, Jacques Verdu ENSAM, 1992
- Comportement mécanique des matériaux, D. François, A.Pineau, A. Zaoui, tomes 1 et 2, Hermès, Paris, 1993
- Dislocations, J. Friedel, Pergamon, Oxford, 1964.
- Eléments de Metallurgie Physique, La Documentation Française, Paris, 1977.
- Etude de la plasticité et application aux métaux, D. Jaoul, Dunod, Paris 1965.
- Introduction to dislocations, D. Hull, J. Bacon, International series on materials science and technologie, Pergamon,Oxford, ,1984.
- Matériaux Polymères. Propriétés Mécaniques et Physiques, H. H. Kausch et col, Traité des Matériaux vol. 14. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2001.
- Matériaux et propriétés, Y. Berthaud, Polycopié, 2004.

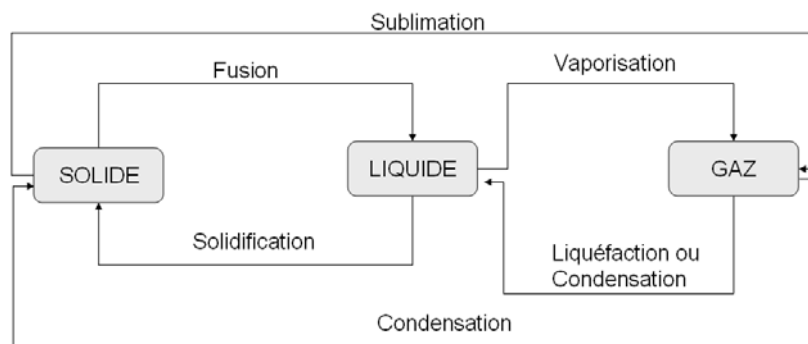
2 ETATS, LIAISONS, STRUCTURES ET COMPORTEMENT THERMO-ELASTIQUE.

2.1 Les états de la matière

Trois états sont généralement distingués, solide, liquide et gazeux.

1. **A l'état gazeux**, la matière est diluée et désordonnée. Les atomes sont en mouvement permanent dans toutes les directions au gré des chocs entre atomes. Le désordre du système est alors maximal. La pression peut être interprétée comme une conséquence de l'agitation des atomes. La pression est la force moyenne par unité de surface due aux particules venant frapper une paroi. Prenons l'exemple du gaz argon, dont la dimension des atomes est de 0.2 nm, à l'état gazeux, les atomes se déplacent à une vitesse moyenne de 100 ms^{-1} et se trouvent à une distance d'environ 4 nm les uns des autres.
2. **L'état liquide** est un état plus ordonné qu'un gaz. Le liquide est plus dense, les particules (atomes ou molécules) interagissent davantage les unes avec les autres, de ce fait il existe un ordre à petite distance (quelques dizaines de particules). Beaucoup de particules se contentent de vibrer sans changer leur position relative par rapport aux particules voisines. Cependant des échanges de position restent possibles, c'est ce qui permet la diffusion, phénomène facile à mettre en évidence dans le cas de deux liquides miscibles. Dans le cas de l'argon à l'état liquide, par exemple, les atomes se déplacent à une vitesse moyenne de 10 ms^{-1} et se trouvent à une distance d'environ 0.4 nm les uns des autres.
3. **L'état solide** est le plus ordonné et le plus dense. Les atomes interagissent beaucoup avec leurs voisins et de ce fait l'ordre existe à grande distance. On parle alors de structure cristalline. Dans les métaux courants, les cristallites (ou grains) ont des dimensions de l'ordre de quelques dizaines de micromètres. Dans les solides, les atomes vibrent autour d'une position moyenne, la diffusion est beaucoup plus difficile.

Le schéma ci-après donne la nomenclature des divers changements d'état ou transitions de phase entre les états solide, liquide et gazeux.



On peut ajouter à cette liste d'états fondamentaux deux états « composites », c'est-à-dire des milieux dans lesquelles coexistent des états différents.

4. **L'état pâteux**, pour lequel des particules solides baignent dans un milieu liquide. On peut citer par exemple, le mortier avant la prise (grains de sable + pâte de ciment) ou encore la pâte dentifrice. Ces milieux, dits milieux granulaires, ont des propriétés originales. Les particules solides sont susceptibles de s'ordonner à courte distance, lorsque le milieu est en mouvement (quelques dizaines de particules) ou à grande distance lorsque le milieu est au repos. Ainsi le comportement observé peut s'approcher tantôt de l'état liquide, tantôt de l'état solide en fonction de la vitesse de déformation (c'est le comportement des sables mouvants, par exemple).

5. **L'état caoutchoutique**, pour lequel des fibres solides sont enchevêtrées (exemple : panneaux de fibres de verre). Autour de la position de repos le désordre des fibres est maximal, les fibres peuvent bouger facilement les unes par rapport aux autres, le milieu est très compressible, et peut être plus ou moins considéré comme un gaz. Si le milieu est soumis à de fortes déformations, les fibres peuvent s'aligner, s'organiser localement et le comportement évolue vers celui d'un solide.

2.2 Etat Solide, liaisons

A l'état solide on distinguera trois types de liaisons entre les atomes, qui permettent justement de classer les matériaux en trois grandes familles (métaux, céramiques et polymères).

Liaison ionique : Cette liaison se caractérise par l'échange d'électrons entre deux atomes. Cette liaison est forte car elle sature la couche extérieure des atomes qui deviennent des ions. Cette liaison concerne essentiellement les éléments qui ont peu d'électrons sur leur couche externe (colonnes 1 et 2 du tableau périodique) et les éléments qui ont des couches externes presque saturées (colonnes 16 et 17 du tableau périodique). Par exemple, le sodium Na, présente une structure électronique comme suit : $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$. Il devient donc un ion Na^+ . Par ailleurs le Chlore Cl, présente une structure électronique comme suit $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^5$, il devient donc un ion Cl^- , on obtient alors le composé stable NaCl. Cette liaison est forte car elle stabilise fortement la structure électronique des atomes en saturant leur couche électronique externe.

La réaction $K^+ + Cl^-$ donne KCl libère ainsi une énergie de 374 kJ/mole.

Liaison covalente : Cette liaison se caractérise par la mise en commun d'électrons afin de saturer les couches électroniques externes de chacun des atomes de la molécule. Cette liaison permet par exemple d'expliquer l'association de deux atomes d'hydrogène pour former la molécule de di-hydrogène. La liaison covalente est également une liaison forte puisque elle permet de saturer la couche électronique externe des atomes.

La réaction $H+H$ donne H_2 libère ainsi une énergie de 436 kJ/mole

Liaison métallique : Cette liaison se caractérise aussi par la mise en commun d'électrons entre plusieurs atomes afin de saturer les couches électroniques externes. A la différence de la liaison covalente, la liaison métallique est délocalisée, c'est-à-dire que chaque atome peut être considéré comme un ion baignant dans un gaz d'électron. Les orbitales externes des atomes « coalescent » lorsque le cristal se forme. Ainsi les électrons de la couche externe ont-ils la liberté de se déplacer partout dans le cristal. Le matériau est alors conducteur électrique et thermique. Les atomes qui, isolés, présentent en couche externe des orbitales de type *s* ou *d*, dont la forme est assez isotrope, ont davantage tendance, lorsqu'ils sont sous forme de cristaux, à former des liaisons métalliques. Cette liaison est un peu moins forte que les liaisons covalente ou ionique mais elle reste une liaison forte.

Liaisons faibles (Van der Waals, liaison hydrogène) : Il existe également des liaisons électrostatiques faibles entre les molécules (et non pas entre atomes). Divers mécanismes font que les liaisons entre deux atomes d'une molécule peuvent être légèrement dissymétriques. La liaison se comporte alors comme un dipôle électrique. Lorsque plusieurs molécules sont assemblées, les pôles positifs et négatifs des dipôles auront tendance à s'attirer. Ainsi apparaissent des liaisons faibles entre molécules.

Prenons par exemple le cas de la molécule HCl. L'atome d'hydrogène est de structure ($1s^1$), il cède un électron et devient un proton H^+ . Par ailleurs, le Chlore ($1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^5$) acquiert un électron et devient un ion Cl^- . Ainsi se forme une molécule stable de HCl. Cependant l'électron cédé par l'atome d'hydrogène provient d'une couche très proche du noyau (la première) et est donc fortement liée à son noyau. Cet électron doit s'insérer dans une couche externe de l'atome de Chlore où il sera plus éloigné du noyau et donc moins attiré. La liaison covalente HCl n'est donc pas symétrique, l'électron reste finalement plus proche de l'atome d'hydrogène que de l'atome de Chlore. Ceci conduit à la formation d'un dipôle électrique sur la liaison HCl. Lorsque plusieurs molécules d'HCl sont mises en présence, le côté Cl d'une molécule attire le côté H d'une autre. Cette interaction entre molécules est appelée une liaison faible. Selon ce mécanisme, le dipôle est d'intensité maximale dans le cas d'une liaison hétérogène entre un atome d'hydrogène (très petit) et un autre atome beaucoup plus lourd (liaison hydrogène) mais

peut exister a priori pour toute autre liaison hétérogène. Il existe également d'autres mécanismes de formation de dipôles électriques dans une molécule.

Energie de liaison

Finalement, pour une liaison particulière entre deux atomes on peut définir un potentiel d'interaction, qui résulte des interactions nucléaires (répulsives) et des diverses interactions attractives entre atomes (covalente, ionique, métallique et faibles). Lorsque les atomes s'éloignent les interactions sont plus faibles.

On peut retenir que la forme du potentiel d'interaction entre deux atomes à une distance r l'un de l'autre est de la forme

$$E = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}$$

L'exposant n est généralement élevé ($n=8$ à 12) tandis que l'exposant m dépend fortement du type de liaison (de 1 à 8 selon le type de liaison). De nombreuses propriétés découlent directement de la forme des interactions entre atomes, comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants.

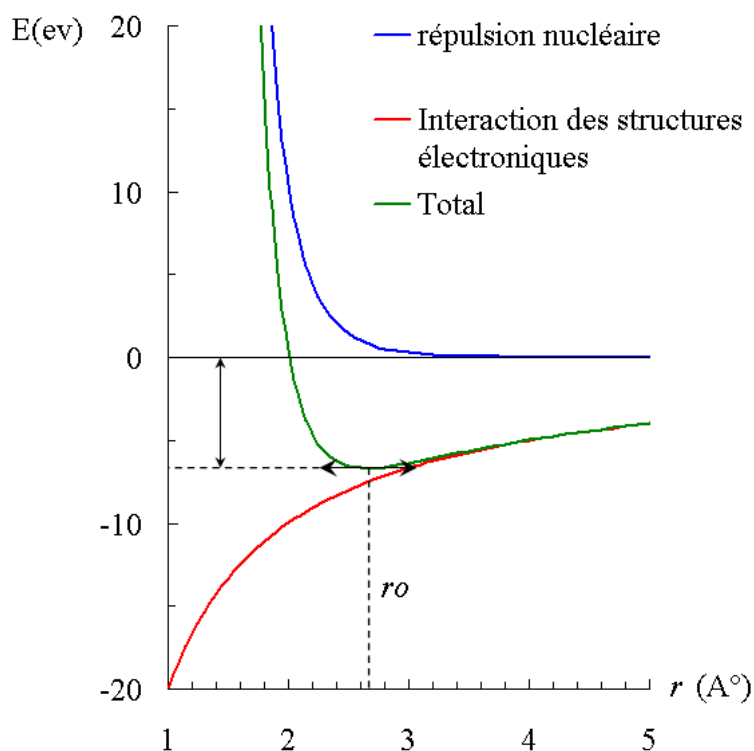


Figure 1 : Potentiel d'interaction pour la liaison NaCl (Quéré).

2.3 Cristallisation

Il existe donc un potentiel d'interaction entre atomes qui résulte de l'interaction répulsive entre les noyaux et des diverses interactions attractives entre les structures électroniques des atomes. La forme du potentiel d'interaction d'une molécule constituée de deux atomes à une distance r l'un de l'autre est de la forme

$$E = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}$$

Cette énergie présente un minimum (Figure 1) pour une distance r_0 entre atomes telle que :

$$\left. \frac{dE}{dr} \right|_{r=r_0} = m \frac{A}{r_0^{m+1}} - n \frac{B}{r_0^{n+1}} = 0 \Rightarrow r_0 = \left(\frac{nB}{mA} \right)^{1/n-m} \quad \text{et} \quad E_{\min} = -\frac{A}{r_0^m} + \frac{B}{r_0^n}$$

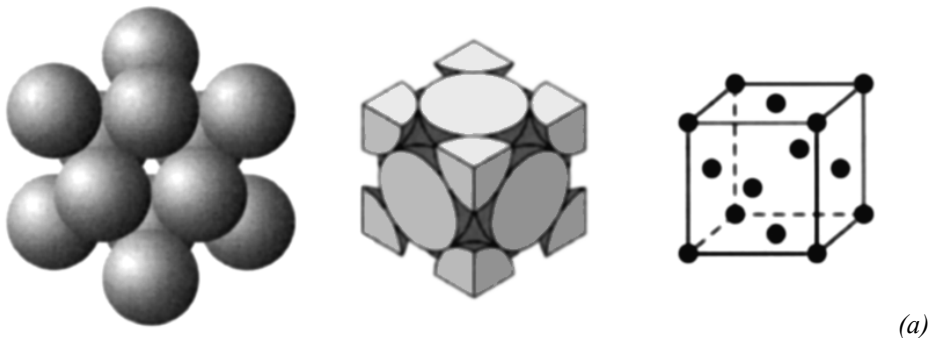
L'existence de ce minimum a plusieurs conséquences :

- (1) Il existe une distance r_0 entre atomes pour laquelle le potentiel d'interaction est minimum. C'est l'état le plus stable. En l'absence de sollicitations extérieures les atomes vont se placer à la distance r_0 les uns des autres. Ceci tend à favoriser l'apparition d'un ordre local dans le matériau voire sa cristallisation. Pour une liaison forte (ionique par ex.) la distance r_0 est de quelques dixièmes de nanomètres (NaCl : 5.63 Å). Pour une liaison faible (Van der Waals) r_0 peut atteindre quelques centaines de nanomètres.
- (2) On peut noter que si l'exposant m augmente, la distance r_0 entre atomes diminue. Ainsi, plus la liaison est forte, plus le matériau est dense. La densité des métaux (moyenne 8000 kg/m³) est beaucoup plus élevée que celle des polymères (moyenne 1000 kg/m³) (Tableau 1).
- (3) Si la valeur de m diminue, la valeur de E_{\min} diminue également en valeur absolue, c'est-à-dire que l'énergie à fournir pour séparer les atomes est plus faible. Ainsi la température de fusion ou de transition vitreuse sera-t-elle d'autant plus faible que la liaison est faible. La température de fusion des métaux (moyenne 1000 °C) est beaucoup plus élevée que la température de fusion des liaisons faibles ou température de transition vitreuse des polymères (moyenne 400°C) (Tableau 1).

2.3.1 Le Cristal Parfait

Le matériau peut donc s'organiser à plus ou moins grande échelle de manière cristalline. Les atomes s'empilent selon un motif qui se répète périodiquement dans l'espace, la maille.

Il existe de nombreuses structures cristallines. Mais, pour les matériaux métalliques, seules trois structures sont rencontrées, la structure cubique à faces centrées (ex. Cuivre, Aluminium, Nickel, Argent, Platine, Or), la structure cubique centrée (Fer α , Chrome, Tantale, Vanadium, Molybdène) et la structure hexagonale compacte (Titane, Zirconium, Cadmium, Zinc, Hafnium).



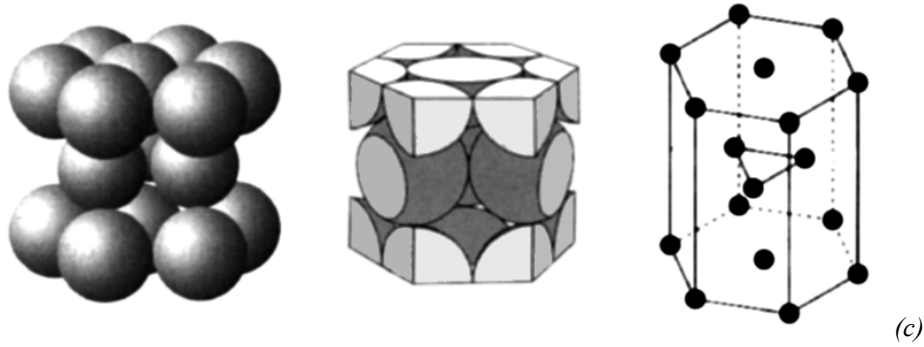


Figure 2 : Exemple de structures cristallines, (a) structure cubique à faces centrées (CFC), (b) structure cubique centrée (CC), (c) structure hexagonale compacte (HC). (Dorlot p57)

Pour une structure cubique, du fait de la périodicité du réseau, on peut repérer tout atome du réseau cristallin à l'aide d'indices entiers (x,y et z), et tout plan du réseau cristallin par des indices entiers (indices de Miller), notés généralement (h,k,l).

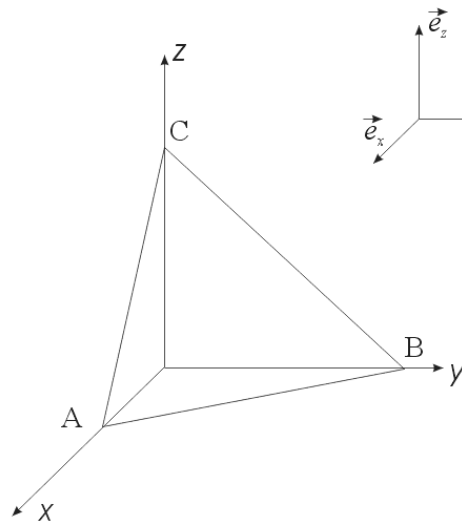


Figure 3 : A, B, C atomes d'un cristal de structure cubique. e_x, e_y, e_z , vecteurs de base du réseau cubique. (ABC) un plan du cristal.

Si a, b, et c sont les distances entre atomes dans le motif de base du réseau cristallin, la position M d'un atome quelconque du réseau cristallin se définit à partir des vecteurs de base du réseau comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = x.a.\vec{e}_x + y.b.\vec{e}_y + z.c.\vec{e}_z.$$

On peut alors repérer tout plan du cristal par ses indices de Miller (Figure 1). Posons par exemple $OA = x.a$, $OB = y.b$ et $OC = z.c$, où x, y, z sont des entiers, le plan (ABC) est défini par l'équation (a) et tout plan parallèle au plan (ABC) par l'équation (b) où P est un nombre entier

$$x/a + y/b + z/c = 1 \quad (a) \qquad x/a + y/b + z/c = P \quad (b)$$

Prenons les inverses $1/x, 1/y, 1/z$ des indices des points A, B et C, et multiplions les par leur plus petit commun multiple. On obtient alors trois nombres entiers (h,k,l) qui sont les indices de Miller du plan considéré. L'équation du plan (ABC) et des plans qui lui sont parallèles s'écrit alors $hx + ky + lz = N$, où N est entier.

Les indices de Miller d'une famille de plans parallèles sont notés entre parenthèses : (h,k,l).

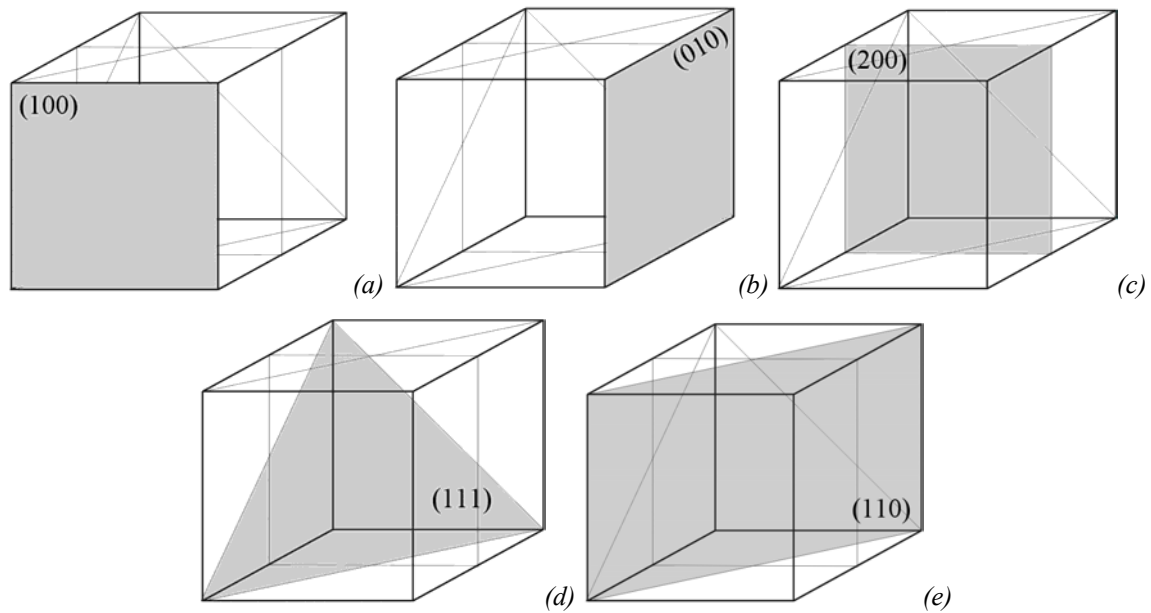
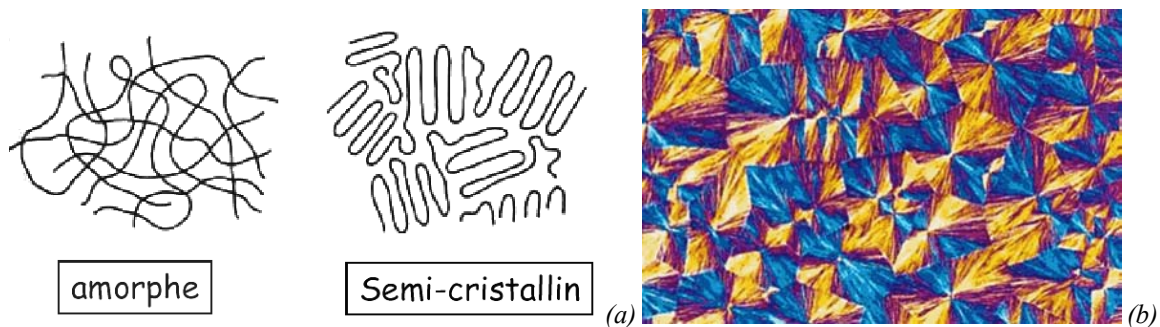


Figure 4 : Illustration de la dénomination de plans cristallins à l'aide des indices de Miller, (a) plan (100), (b) plan (010), (c) plan (200), (d) plan (111) et (e) plan (110). (Voir aussi l'ouvrage de **Kittel**, physique de l'état solide).

Les céramiques ioniques ou covalentes ont souvent des structures plus complexes, il existe jusqu'à quatorze structures cristallines (ou réseaux de Bravais), qui consistent en quatorze manières de paver l'espace avec des motifs de base, qui sont bien plus nombreux.

2.3.2 Zones amorphes, zones cristallisées.

Dans un matériau solide, des zones désordonnées et des zones cristallisées sont susceptibles de coexister. C'est couramment le cas dans les matériaux polymères. Les polymères sont de longues molécules organiques. Il existe généralement des liaisons faibles entre les molécules, ce qui conduit à leur organisation locale. Comme la liaison entre molécules est faible, la distance d'équilibre (r_0) est assez grande (quelques centaines de nanomètres), le réseau cristallin local permet donc de polariser la lumière dans le domaine du visible (longueur d'onde du visible entre 400 nm et 800 nm). Ce qui permet de visualiser les zones cristallisées en microscopie optique.



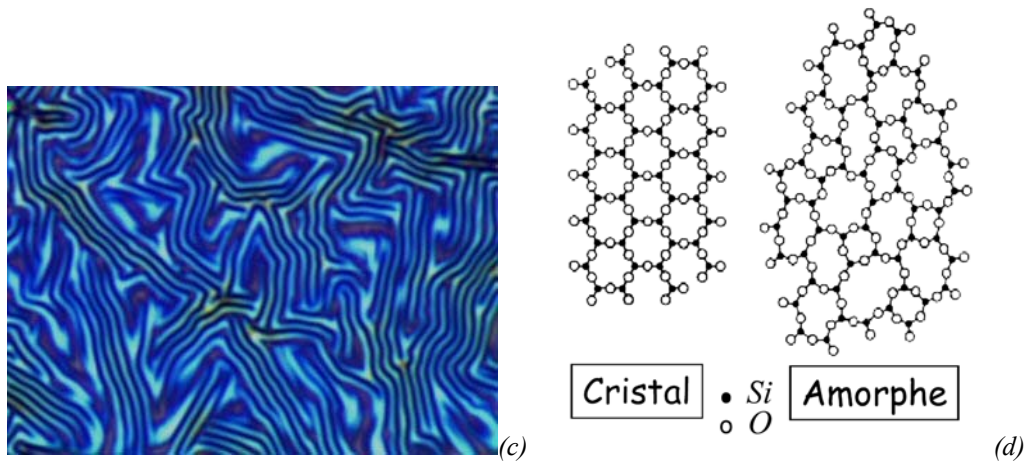


Figure 5 : (a) illustration de la structure amorphe ou semi-cristalline d'un polymère linéaire (b) cliché pris en microscopie optique d'un polymère semi-cristallin, les contrastes de couleur proviennent de la polarisation de la lumière par le réseau cristallin local formé par les molécules, (c) structuration à une échelle nanométrique dans un mélange de polymères, (d) illustration de la structure cristalline ou amorphe de la silice SiO₂.(Ecole GDR Verres, J.M. Pelletier)

2.4 Elasticité

2.4.1 Modèle moléculaire

On peut également déduire de l'existence d'un potentiel d'interaction entre atomes des informations sur le comportement mécanique de la liaison. La forme du potentiel d'interaction (Figure 6 (a)) d'une molécule constituée de deux atomes à une distance r l'un de l'autre est de la forme

$$E = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}$$

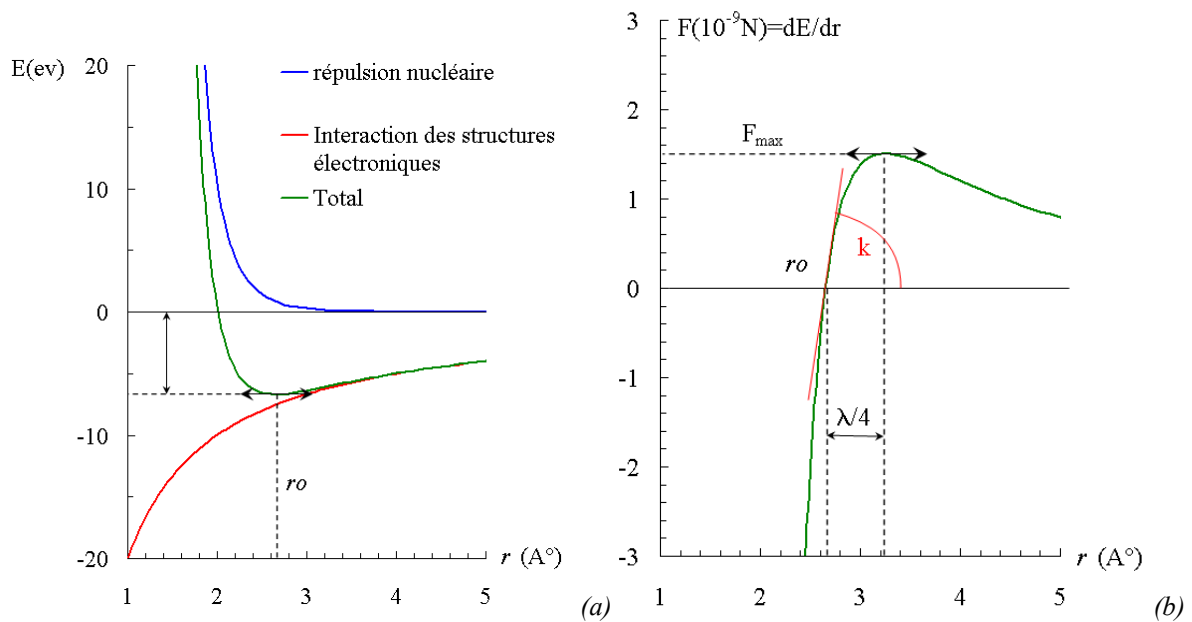


Figure 6 : Illustration, (a) potentiel d'interaction découlant des forces nucléaires répulsives et des interactions attractives entre structures électroniques. Existence d'un minimum de potentiel à la distance r_0 . (b) Force associée, elle présente un maximum pour un déplacement de $\lambda/4$, on lui associe une raideur k autour de la position d'équilibre r_0 . n.b. $1eV=10^{-19} J$, $1A^\circ=10^{-10} m$.

Si les deux atomes se trouvent à leur distance d'équilibre r_0 , et qu'on cherche à modifier cette distance, l'énergie à fournir sera alors :

$$\Delta E = E(r) - E_{\min} = \int_{r=r_0}^r \frac{dE}{dr} dr = \int_{r=r_0}^r F(r) dr$$

L'effort $F(r)$ à appliquer sur la liaison au cours de la déformation de la liaison est la dérivée du potentiel par rapport à r (Figure 6 (b)). On constate que l'effort présente un maximum F_{max} pour une distance notée $\lambda/4$. Théoriquement, l'effort maximal F_{max} à appliquer pour rompre la liaison peut donc être déduit des caractéristiques de la liaison.

Lorsque r tend vers r_0 cet effort tend naturellement vers zéro. On peut effectuer un développement de Taylor de l'effort autour de la position d'équilibre de la liaison ($r = r_0$), on en déduit alors qu'au premier ordre :

$$F(r) \approx \frac{d^2 E}{dr^2} (r - r_0) = k(r - r_0)$$

La liaison se comporte comme un ressort autour de sa position d'équilibre. Ce comportement linéaire autour de la position d'équilibre est appelé l'élasticité.

On trouve alors l'expression de la raideur de la liaison en fonction de l'exposant m et des autres paramètres :

$$k = \frac{Bn(n+1)}{r_0^{2+n}} - \frac{Am(m+1)}{r_0^{2+m}}$$

Ainsi, plus la liaison entre atomes est forte et plus la distance r_0 est faible donc plus la raideur k de la liaison augmente.

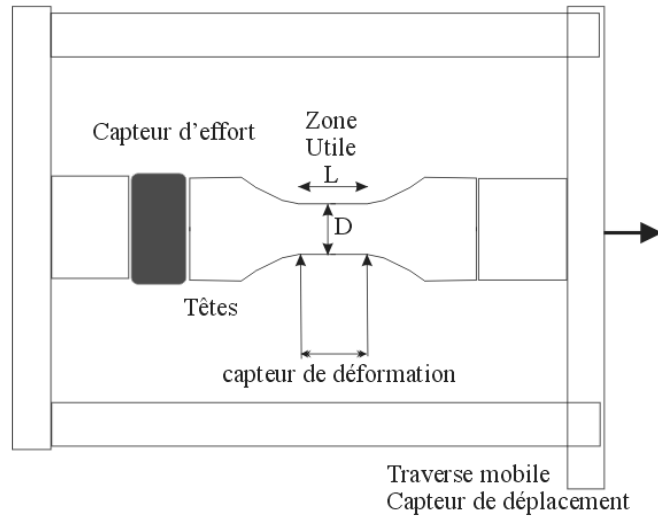
2.4.2 Modèle macroscopique.

Le modèle moléculaire permet de comprendre l'origine physique du comportement élastique. Cependant, en pratique il est difficile de caractériser le comportement élastique d'une liaison. En outre, lorsque les atomes sont sous forme de cristaux les orbitales sont déformées (Figure 131) et le potentiel d'interaction est différent de celui d'une liaison simple.

Lorsqu'on caractérise un matériau solide, on emploie des grandeurs relatives à un volume de matériau, les contraintes, les déformations, les densités volumique de puissance et d'énergie.

◇ Caractérisation des propriétés élastiques d'un matériau.

- Conditions nécessaires à la validité de l'essai :
 - Volume de matière testé >> échelle de l'hétérogénéité du matériau
 - Contrainte et déformation homogène dans la zone utile de l'éprouvette
- Exemple : caractérisation du comportement en traction simple d'un acier doux à 0.48% de carbone
 - Taille de grain : 30 μm
 - Volume minimal de matière : 10^6 grains
 - Eprouvette est cylindrique avec $L=1.5 D \rightarrow D=10 \text{ mm}$



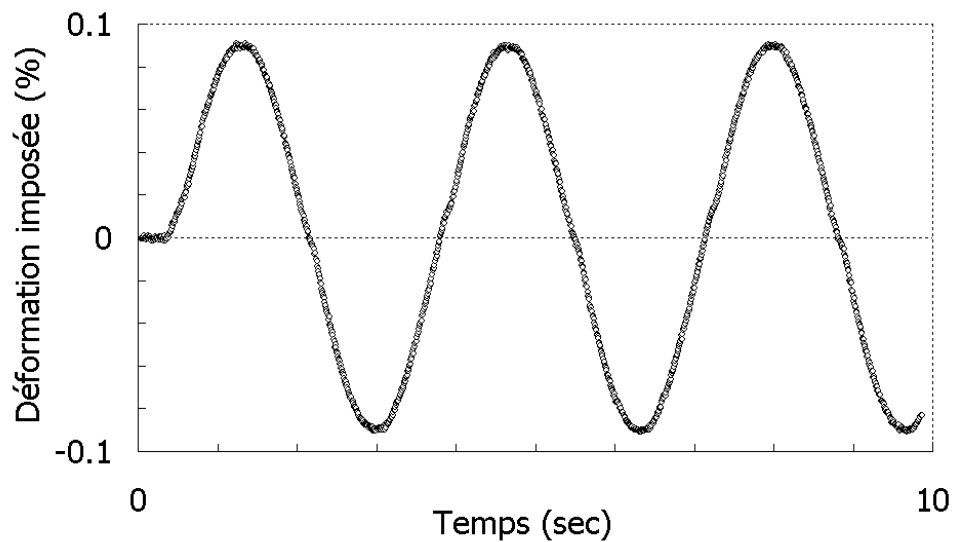
La déformation axiale se calcule comme suit, où L_0 est la distance initiale entre les points de mesure du capteur de déformation et L la longueur courante :

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$$

La contrainte appliquée se calcule alors comme suit, où $S_0 = \pi D^2/4$ est la section de l'éprouvette et F l'effort mesuré

$$\sigma = \frac{F}{S_0}$$

- Etude du comportement d'un acier doux à 0.48% de carbone dans son domaine d'élasticité, résultats



(a)

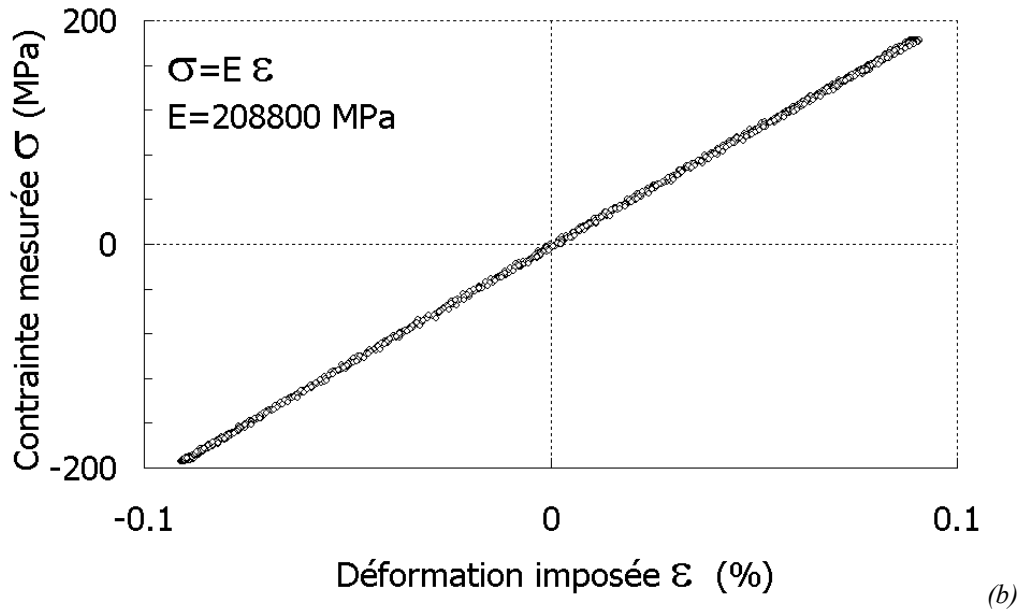


Figure 7 : Exemple de résultats expérimentaux obtenus par Rami Hamam sur un acier doux à 0.48% de carbone. (a) déformation imposée à l'éprouvette en fonction du temps, (b) contrainte mesurée en fonction de la déformation imposée, Le comportement du matériau reste élastique.

– Remarque sur les résultats expérimentaux

On peut faire plusieurs remarques sur ces résultats expérimentaux.

- (1) Le comportement est effectivement linéaire lorsque le niveau de déformation reste faible.
- (2) Au cours d'un essai de traction uniaxial comme celui-ci, on identifie le module d'élasticité E , ou module d'Young du matériau, comme étant la pente de la courbe contrainte-déformation. Dans le cas présent, on trouve un module d'élasticité $E=208$ GPa.
- (3) Lors d'un essai de charge-décharge, on n'observe pas d'hystérésis sur la courbe. Le comportement est élastique dans les deux sens du terme. D'une part la transformation se fait sans dissipation d'énergie, d'autre part, on n'observe pas de changement permanent de forme de l'éprouvette.

◇ Constantes d'élasticité d'un matériau.

On peut généraliser le raisonnement effectué sur la base du modèle moléculaire au milieu continu.

Supposons que la densité massique d'énergie libre (ou de cohésion) du matériau soit notée ψ

Alors, la contrainte qu'il faut appliquer pour déformer le cristal se calcule comme suit (voir §2.4.1)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \rightarrow \forall i, j = 1, 3 : \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Si maintenant on cherche à déterminer le comportement élastique du matériau autour de sa position d'équilibre (voir §2.4.1), on peut effectuer un développement en série de Taylor au premier ordre, soit

$$\underline{\underline{\sigma}} \approx \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^2} \underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \forall i, j = 1, 3 : \sigma_{ij} \approx \sum_{k,l} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl}$$

On pourra alors noter la relation entre la contrainte et la déformation comme suit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \forall i, j, k, l = 1, 3: A_{ijkl} \approx \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

A priori on doit donc déterminer $3^4=81$ coefficients A_{ijkl} pour définir le comportement élastique d'un matériau. En réalité il en faut beaucoup moins. En effet, la contrainte et la déformation sont des tenseurs symétriques, donc $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ et $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$. Donc $A_{ijkl}=A_{jikl}=A_{ijlk}=A_{jilk}$. En outre, du fait de la commutativité de l'opérateur dérivée, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}$ donc $A_{ijkl}=A_{klij}$.

Finalement, 21 coefficients au maximum sont suffisants pour définir la loi de comportement élastique de tout matériau.

◇ Rôle des symétries

Dans la pratique, il est très rare qu'il soit nécessaire de caractériser 21 coefficients pour définir la loi de comportement élastique d'un matériau. En effet, les propriétés de symétrie du matériau permettent de réduire significativement le nombre de coefficients nécessaires à la description du comportement élastique du matériau.

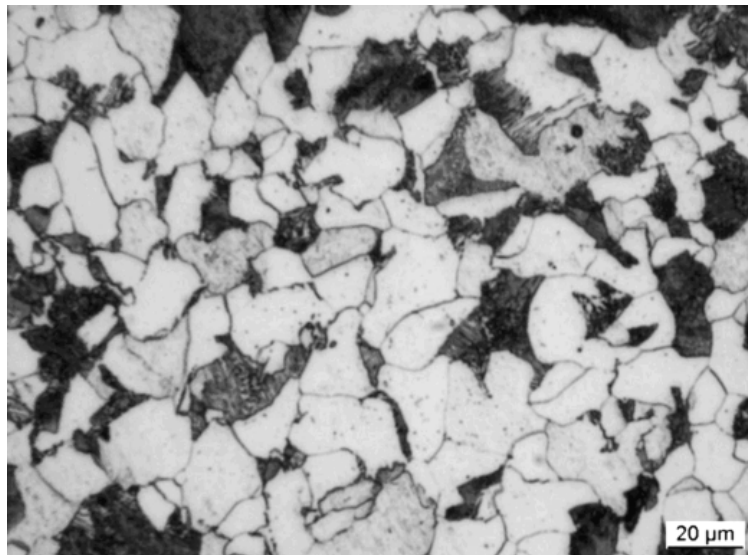


Figure 8 : micrographie de l'acier doux à 0.48% de carbone dont on a caractérisé le comportement élastique (Figure 7). Chaque domaine de dimension proche de $30\mu\text{m}$, est une cristallite de Fer. Les orientations des cristallites sont aléatoires.

Les métaux d'usage courant, par exemple, sont généralement isotropes. Ils sont constitués de grains, d'une dimension de l'ordre de quelques dizaines de microns. Chaque grain est un cristal, mais les orientations cristallines des grains sont généralement aléatoires. Ainsi à l'échelle macroscopique, le matériau est il isotrope.

Alors, à l'échelle macroscopique, le potentiel de cohésion du cristal ψ est également isotrope, et peut donc s'exprimer comme une fonction des invariants par rotation du tenseur des déformations, tels que l'identité, la trace, le déterminant... Si l'on se limite au premier ordre pour la déformation, le potentiel est du second ordre et peut alors s'écrire :

$$\rho\psi = a + b(\text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}}) + \frac{\lambda}{2} \cdot (\text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu \cdot \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2)$$

Sachant que la contrainte est nulle pour une déformation nulle, on en déduit la relation suivante entre contrainte et déformation élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \lambda \cdot \text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Seuls deux coefficients sont alors nécessaires pour définir complètement le comportement élastique d'un matériau, λ et μ les coefficients de Lamé, ou bien E et ν le module de Young et le coefficient de Poisson avec :

$$\text{Avec } \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{et} \quad 2\mu = \frac{E}{(1 + \nu)}$$

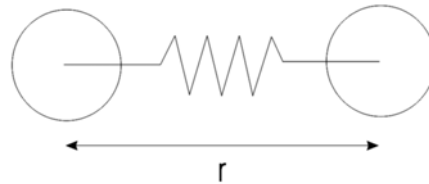
Si le matériau est anisotrope, c'est-à-dire s'il n'est pas isotrope, il peut néanmoins présenter certaines symétries. Par exemple, une symétrie par rapport à un plan et une symétrie axiale autour de la normale à ce plan, pour un composite structural en nid d'abeille, par exemple, on pourra tenir compte de la symétrie dans la forme du potentiel et se limiter au nombre strictement nécessaire de coefficients et donc de mesures à réaliser.

2.5 Dilatation thermique

2.5.1 Modèle moléculaire

Le modèle moléculaire permet également de prévoir la dilatation thermique du matériau.

En effet, lorsqu'un matériau est chauffé, les électrons sont excités et acquièrent une énergie cinétique. On peut assimiler le modèle moléculaire à un modèle dynamique de masse-ressort. Il faut cependant ne pas oublier que ce sont les électrons qui acquièrent une énergie cinétique et pas les noyaux.



Lorsque l'énergie cinétique interne des molécules est nulle, la température du système est également nulle (zéro absolu). L'énergie interne du système U_0 est alors égale à l'énergie de la liaison au repos E_{\min} . Lorsqu'on fournit de la chaleur Q au système, l'énergie interne est alors égale à $U = U_0 + Q$.

Si on laisse ensuite le système évoluer sans échange d'énergie avec l'extérieur, son énergie interne reste constante et égale à U . Cependant, des transferts d'énergie sont susceptibles de se produire entre énergie potentielle et énergie cinétique. L'énergie potentielle est maximale lorsque l'énergie cinétique est minimale et vice-versa. Le système vibre. Aux extrema, l'énergie cinétique est nulle et l'énergie interne est égale à l'énergie potentielle.

Compte tenu du fait que les interactions répulsives sont fortes, tandis que les interactions attractives sont plus faibles, la courbe potentiel-distance r est dissymétrique (Figure 9). Aussi la distance moyenne r entre atome se décale t'elle vers les grandes valeurs de r lorsque la température augmente.

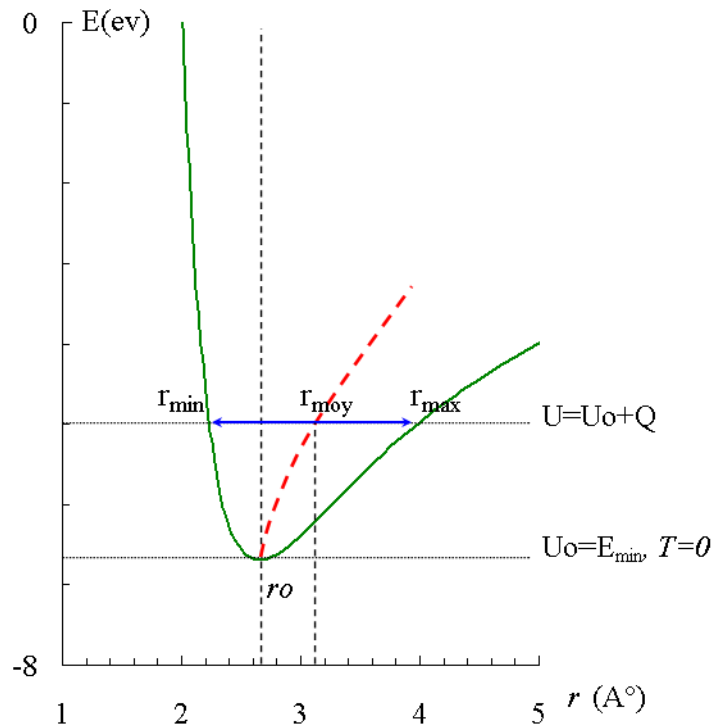


Figure 9 : Illustration, potentiel d'interaction découlant des forces nucléaires répulsives et des interactions attractives entre structures électroniques. La position des atomes oscille autour de r_0 , pour les valeurs maximum et minimum de r , l'énergie cinétique est nulle et l'énergie interne est égale à l'énergie potentielle. La position moyenne est tracée en pointillés.

A l'échelle macroscopique, ce phénomène est ce qu'on appelle la dilatation thermique. Ainsi plus la liaison est forte, plus la dilatation thermique est faible. Ainsi, les céramiques (liaisons covalentes ou ioniques) présentent-elles généralement des coefficients de dilatation faibles tandis que les polymères (liaisons de Van der Waals entre molécules) ont des dilatations thermiques très élevées.

On peut alors définir pour le système une énergie potentielle moyenne du système et qui devient une fonction de la température (Figure 9, courbe en pointillés).

2.5.2 Modèle macroscopique.

Comme pour les constantes d'élasticité, il est plus simple de caractériser les coefficients de dilatation thermique à l'échelle macroscopique.

En se fondant sur le modèle moléculaire, à l'échelle macroscopique, la densité massique moyenne d'énergie libre ψ est une fonction de la température. Si on se limite encore au premier ordre pour ε et au cas de l'isotropie, l'expression de ψ peut être écrite en fonction d'invariant du tenseur des déformations et de la température, où d et f sont des coefficients à déterminer :

$$\rho\psi = a + \frac{\lambda}{2} \cdot (\text{Tr}\varepsilon)^2 + \mu \cdot \text{Tr}(\varepsilon^2) - d \cdot T \cdot \text{Tr}\varepsilon - f \cdot T^2$$

Comme précédemment, on peut en déduire l'expression de la contrainte en fonction de la déformation totale et de la température. Et on exprime finalement le résultat de la manière suivante. La déformation totale ε est la somme d'une déformation élastique ε_e et d'une déformation thermique ε_θ , et à tout instant :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_\theta \quad , \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_\theta = \alpha(T - T_0)\underline{\underline{I}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}}_e \underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}_e$$

2.6 Thermo-élasticité des matériaux hétérogènes ou composites

Lorsque l'on emploie des matériaux hétérogènes, naturels (bois..) ou synthétiques (matériaux composites...), les comportements thermo-élastiques des divers constituants sont différents. On peut chercher à définir le comportement global du matériau hétérogène en fonction des comportements élémentaires de chacun de ses constituants afin d'optimiser sa structure en fonction de l'application mécanique visée.

◇ Exemples de structures de matériaux composites

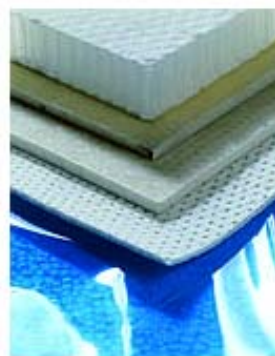
On parle de matériau composite lorsque le matériau est constitué de plusieurs matériaux de base, et lorsque l'assemblage possède une structure qui résulte du procédé de fabrication choisi et qui participe au comportement du matériau. De nombreuses structures existent. Lorsque le matériau est constitué de fibres longues alignées dans une matrice, on parlera de « pli » d'un matériau composite à fibre longue. Lorsque les fibres ont été enroulées sur un mandrin avant d'être imprégnées de résine, on parlera d'enroulement filamentaire. Lorsque des couches sont empilées, on parlera de structure sandwich ou de composite stratifié.



Composites



Enroulement filamentaire



Structure Sandwich

Le comportement du matériau composite dépend d'une part des comportements élémentaires de ses constituants et d'autre part de la structure selon laquelle sont assemblés ces constituants.

◇ Comportement élémentaires, modèles rhéologiques

Afin de représenter les comportements élémentaires des constituants d'un matériau hétérogène, on emploiera généralement des modèles rhéologiques simples. L'assemblage de « modules » rhéologiques divers permet de comprendre le fonctionnement du matériau hétérogène. On se limitera ici à étudier le comportement homogénéisé d'un matériau composite sollicité de manière uniaxiale (1D) et selon deux assemblages, l'assemblage série et l'assemblage parallèle.

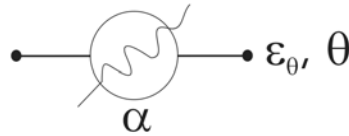
- Elasticité

On représentera le comportement élastique à l'aide d'un ressort uniaxial de traction compression. Lorsque l'on applique une contrainte σ sur ce « ressort » il se déforme élastiquement avec une déformation notée ϵ_e . Avec $\sigma = E \cdot \epsilon_e$, où E est le module d'élasticité du matériau.



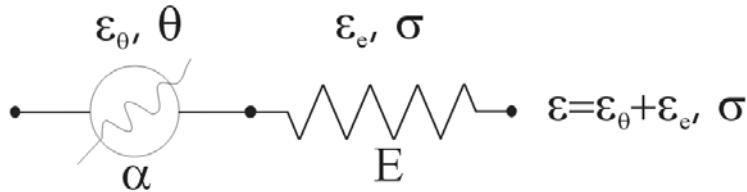
- Dilatation thermique

On représentera également la dilatation thermique à l'aide d'un élément uniaxial simple. Lorsque l'on applique une variation de température θ sur cet élément il se dilate thermiquement avec une déformation d'origine thermique notée ϵ_θ . Avec $\epsilon_\theta = \alpha \cdot \theta$, où α est le coefficient de dilatation du matériau.



Comportement thermo-élastique d'un constituant élémentaire

Chaque matériau est susceptible de se déformer élastiquement et de se dilater thermiquement. Comme les déformations élastiques et thermiques se somment on pourra représenter le comportement thermo-élastique de chaque constituant d'un matériau composite de la façon suivante :

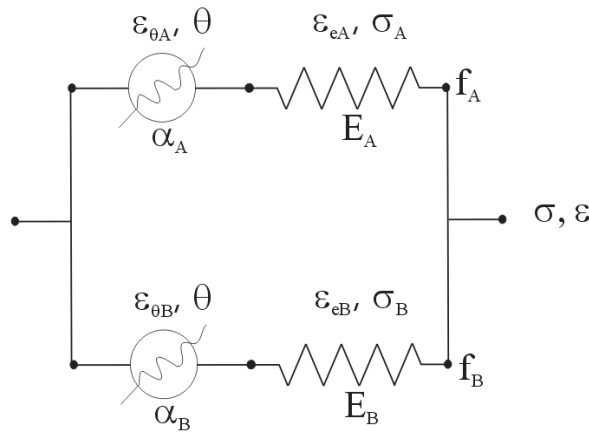


◇ Assemblage parallèle

Si maintenant on assemble deux matériaux élémentaires pour former un matériau composite, la structure de l'assemblage permet d'écrire des relations simples concernant le comportement de l'assemblage. Dans le cas d'un assemblage parallèle de matériau A, avec une fraction volumique f_A et de matériau B avec une fraction volumique f_B on pourra écrire :

$$\epsilon = \epsilon_A = \epsilon_B \quad \text{et} \quad \sigma = f_A \sigma_A + f_B \sigma_B$$

Avec $\epsilon_A = \epsilon_{eA} + \epsilon_{\theta A}$ et $\epsilon_B = \epsilon_{eB} + \epsilon_{\theta B}$



Cet assemblage serait adapté pour décrire, par exemple, le comportement d'un matériau composite à fibre longues sollicité dans la direction des fibres (selon la direction A, Figure 10, (a)).

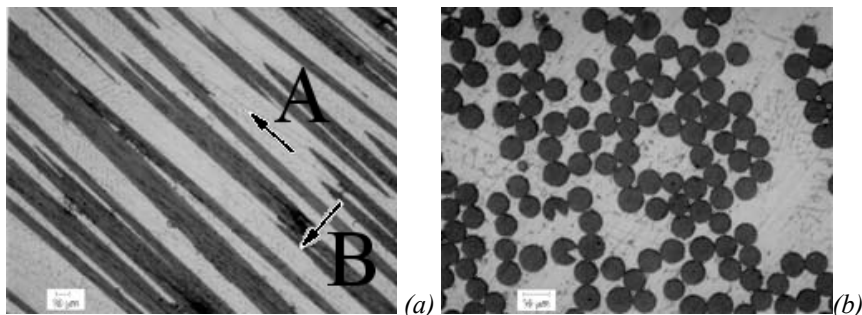


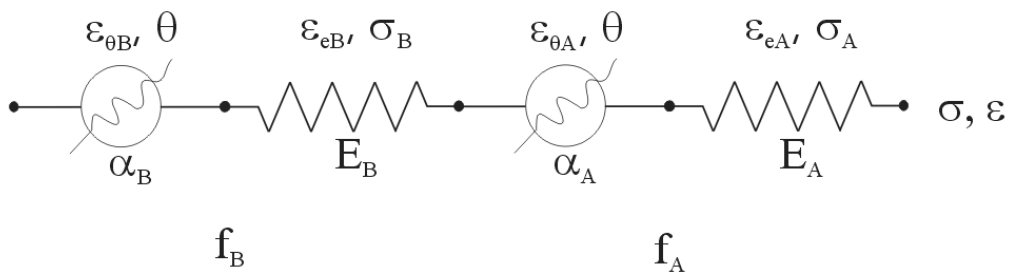
Figure 10 : Cliché d'un matériau composite à fibre longue, (a) section parallèle aux fibres, (b) section transverse (issu de <http://igahpse.epfl.ch/mmc/illustration/elaboration>).

◇ *Assemblage série*

Dans le cas d'un assemblage série de matériau A, avec une fraction volumique f_A et de matériau B avec une fraction volumique f_B on pourra écrire :

$$\varepsilon = f_A \varepsilon_A + f_B \varepsilon_B \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma_A = \sigma_B$$

Avec $\varepsilon_A = \varepsilon_{eA} + \varepsilon_{\theta A}$ et $\varepsilon_B = \varepsilon_{eB} + \varepsilon_{\theta B}$



Cet assemblage serait adapté pour décrire, par exemple, le comportement d'un matériau composite à fibres longues sollicité dans la direction orthogonale aux fibres (selon la direction B, Figure 10, (a)).

2.7 Résumé

Les interactions électroniques (liaisons) entre atomes permettent de distinguer trois grandes familles de matériaux, les métaux, les céramiques et les polymères.

- Les liaisons ioniques ou covalentes sont très fortes.
- Les liaisons métalliques sont fortes. Par ailleurs les électrons sont libres de se mouvoir dans tout le cristal, les métaux sont conducteurs de la chaleur et du courant.
- Les polymères sont des molécules organiques entre lesquelles existent des liaisons faibles.

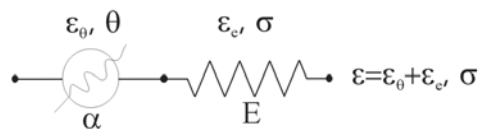
Plus une liaison est forte, plus

- la température de fusion est élevée
- la densité est élevée
- le matériau a tendance à cristalliser
- le module d'élasticité est élevé
- le coefficient de dilatation thermique est faible

Ordres de grandeurs

Propriété	Symbole	Unité	Métaux	Céramiques	Polymères
Température de fusion ou de transition vitreuse	T_f	K	1000	2000	400
Densité	ρ	kg/m³	8000	4000	1000
Module d'élasticité(Young)	E	GPa	200	200	1
Dilatation thermique	α	K⁻¹	$10 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$100 \cdot 10^{-6}$
Conductivité thermique	k	W/(m·K)	100	1	1

Relation de comportement (cas uniaxial), modèle rhéologiques :



- Contrainte σ , déformation ϵ , déformation élastique ϵ_e , déformation thermique ϵ_{θ} .
- Elasticité : $\sigma = E \cdot \epsilon_e$, où E est le module d'élasticité du matériau.
- Dilatation thermique $\epsilon_{\theta} = \alpha \cdot \theta$, où α est le coefficient de dilatation du matériau.
- Les déformations élastiques et thermiques d'un matériau se somment : $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_{\theta}$

Relation de comportement (cas multiaxial, et isotropie) :

- Elasticité : $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda Tr \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}$ ou bien $\underline{\underline{\epsilon}}_e = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} Tr \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{I}}$
- Dilatation thermique : $\underline{\underline{\epsilon}}_{\theta} = \alpha (T - T_0) \underline{\underline{I}}$
- Les déformations élastiques et thermiques d'un matériau se somment : $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_e + \underline{\underline{\epsilon}}_{\theta}$
- Coefficients de Lamé : $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $2\mu = \frac{E}{(1+\nu)}$

2.8 Problèmes.

2.8.1 Thermo-élasticité : Choix de matériaux pour la dérive de l'A380.

La dérive de l'A380, avec 14 m de haut et 13 m de longueur à l'encastrement, est la plus grande dérive d'avions commerciaux au monde. Cette structure, qui subit des sollicitations mécaniques intenses, incorpore de nombreux composants en matériaux composites, parmi lesquels, des raidisseurs en matériau composite à fibres longues, fibre de carbone, matrice époxy. Cette conception est assez révolutionnaire, la dérive étant un composant essentiel pour la sécurité de l'avion. Le remplacement de la structure métallique par une structure composite à pour objectif de minimiser la masse de la structure tout en assurant la tenue à des efforts qui augmentent avec la masse de l'avion.

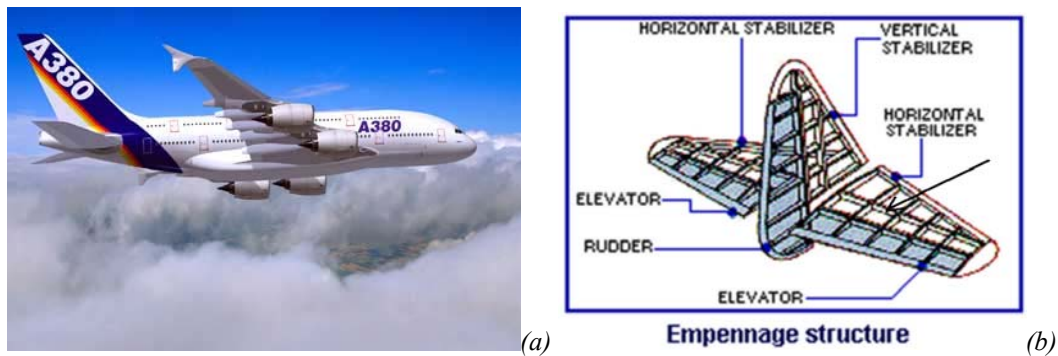


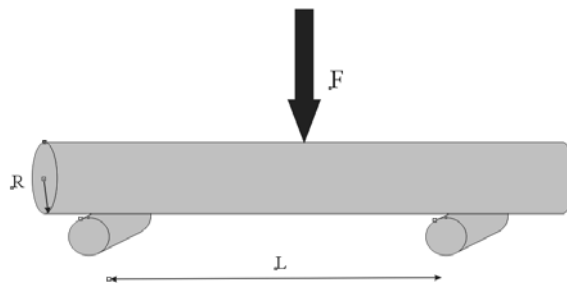
Figure 11 : (a) Vue de l'A380 en vol (b) schéma de la structure interne de l'empennage.

Dans un premier temps nous effectuerons un choix de matériau dans une base de matériaux existants (deux bois, trois alliages métalliques, et une matière plastique) en utilisant deux critères distincts. Nous étudierons en particulier le cas d'un raidisseur transversal travaillant en flexion. Pour simplifier, nous représenterons le raidisseur par une poutre à section circulaire travaillant en flexion.

Dans un deuxième temps, nous proposerons un nouveau matériau (matériau composite, fibre + matrice) susceptible de maximiser les deux critères simultanément. Nous étudierons la réponse du matériau en fonction de sa structure (fraction volumique de fibres).

Enfin, en supposant que le matériau proposé soit employé pour réaliser un raidisseur. Nous étudierons la tenue du matériau en service. Le matériau subit des sollicitations thermiques et mécaniques.

◇ Choix de matériau pour la réalisation d'un raidisseur.



$$f = \frac{FL^3}{48.E.I} \quad \text{et} \quad \sigma_{surf} = R \frac{F}{I} \frac{L}{4} \quad \text{avec} \quad I = \frac{\pi.R^4}{4}$$

On fait l'hypothèse que le raidisseur est une poutre à section circulaire portant sur deux appuis et subissant une force concentrée en son centre F . Le déplacement maximum ou « flèche » est noté f . Le cahier des charges impose la rigidité en flexion du raidisseur que l'on note $K=F/f$. La longueur entre deux appui est aussi imposée. Par ailleurs, la contrainte dans la poutre est maximum en valeur absolue en

surface et vaut alors σ_{surf} . Le cahier des charges impose que σ_{surf} reste inférieure à la contrainte maximale admissible par le matériau.

- **Critère N°1, minimiser la masse à rigidité imposée.**
 - (a) Exprimer la masse M de la barre en fonction de la masse volumique ρ du matériau et des caractéristiques géométriques, R le rayon et L la longueur.
 - (b) Exprimer de même la rigidité K en fonction du module d'Young E et des caractéristiques géométriques.
 - (c) En éliminant le rayon R entre ces deux expressions, déterminer la relation entre la masse M de la barre et sa rigidité K . En déduire le critère (critère N°1) à maximiser portant sur les propriétés du matériau qui permet de choisir le matériau permettant de réaliser le raidisseur le plus léger.
 - (d) Employer les cartes d'Ashby pour sélectionner une ou plusieurs familles de matériau.
 - (e) Calculez le critère N°1 pour les matériaux dont les propriétés sont fournies dans le tableau ci-dessous. Conclure.
- **Critère N°2, minimiser la masse à effort maximal imposé.**
 - (a) Exprimez la force F qui engendre la rupture ou l'apparition de déformations irréversibles (fin du comportement élastique). Exprimer cette valeur en fonction de la masse M du raidisseur.
 - (b) Le cahier des charges impose la valeur de F que doit admettre le raidisseur sans se rompre ni se déformer de manière irréversible. En déduire le critère (critère N°2) à maximiser portant sur les propriétés du matériau qui permet de choisir le matériau permettant de réaliser le raidisseur le plus léger.
 - (c) Calculez le critère N°2 pour les matériaux dont les propriétés sont fournies dans le tableau ci-dessous. Conclure.
 - (d) Commenter qualitativement la tenue à l'impact, à la température, à l'humidité, à la lumière ainsi que l'aptitude à la réparation, au recyclage, à la mise en forme et enfin le coût des matériaux proposés et dresser, en guise de conclusion, un bilan des points pour et contre l'utilisation de chacun des six premiers matériaux du tableau page 3.
 - (e) Au vu des résultats précédents quel matériau composite vous paraît le plus propre à maximiser les deux critères simultanément ?

◇ Conception d'un matériau composite.

Les premiers avions, très légers, étaient en bois, puis les contraintes appliquées à la structure ont augmenté, soit du fait de l'augmentation de la masse des avions, soit de leur vitesse. L'importance du critère N°2 dans la conception a donc augmenté. Aussi les structures ont-elles été construites en Aluminium ou même en Titane pour certaines pièces particulièrement sollicitées.

Pour l'A380, l'importance du critère N°2 est encore plus grande. On cherche donc réaliser un matériau qui optimise les deux critères simultanément. On se propose de réaliser un matériau composite à

fibres longues de carbone noyées dans une matrice de résine époxy ou éventuellement d'alliage d'aluminium (voir Figure 12).

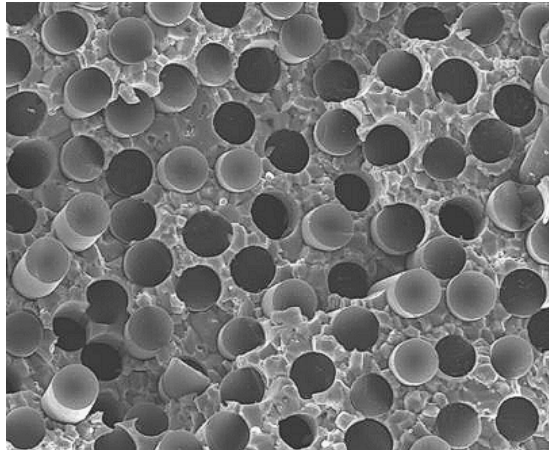


Figure 12 : Cliché obtenu en microscopie électronique à balayage d'un matériau composite à fibres longues de carbone dans une matrice intermétallique NiAl (www.space-mining.com).

• **Question 1 : Critère N°1**

- (a) Proposer un modèle rhéologique pour ce matériau composite, sollicité dans le sens des fibres, et supposé travailler à température constante.
- (b) Exprimer la masse volumique ρ du matériau composite en fonction des masses volumiques des fibres ρ_f et de la matrice ρ_m et de la fraction volumique de fibre f .
- (c) Exprimer le module d'élasticité du matériau composite E en fonction des modules d'élasticités des fibres E_f et de la matrice E_m et de la fraction volumique de fibre f .
- (d) Calculer le Critère N°1 de choix de matériau qui minimise la masse à rigidité imposée pour la poutre à section circulaire travaillant en flexion.
- (e) Tracer le critère N°1 en fonction de la fraction volumique de fibre dans le cas d'un composite carbone-époxy et aluminium-époxy. Discutez.

• **Question 2 : Critère N°2**

- (a) Exprimer la contrainte maximale admissible du matériau composite σ_R en fonction des contraintes maximales admissibles des fibres et de la matrice modules σ_f et σ_m et de la fraction volumique de fibre f .
- (b) Calculer le Critère N°2 de choix de matériau qui minimise la masse à effort maximal imposé pour la poutre à section circulaire travaillant en flexion.
- (c) Tracer le critère N°2 en fonction de la fraction volumique de fibre dans le cas d'un composite carbone-époxy et aluminium-époxy. Discutez.

◇ *Tenue en service du matériau composite.*

La dérive de l'avion subit des sollicitations mécaniques importantes, notamment lorsque l'avion effectue des manœuvres (rotation, décollage, atterrissage). Par ailleurs, l'altitude de croisière de l'avion, lors d'un vol transatlantique par exemple est d'environ 10km, or les

températures à ces altitudes sont bien plus faibles qu'au sol. A chaque vol l'avion subit une variation de température de l'ordre de 70°C.

On suppose que les raidisseurs sont constitués d'un matériau composite, résine époxy fibres de carbone à 30% de fibres. La température de réticulation de la résine est aux alentours de 200°C, cependant on considère que l'adhérence complète fibre matrice se produit aux alentours de $T_R=90^\circ\text{C}$. La température au sol est de $T_0=20^\circ\text{C}$ et en altitude de croisière de $T=-50^\circ\text{C}$. Le coefficient de dilatation thermique de la résine est $\alpha_m=80.10^{-6}$ tandis que celui des fibres vaut $\alpha_f=9.10^{-6}$.

• **Question 1 : Influence du procédé de fabrication**

- (a) Proposer un modèle rhéologique pour ce matériau composite, sollicité dans le sens des fibres, et supposé travailler à température variable.
- (b) Ecrire la déformation ϵ du composite en fonction des déformations thermiques ($\epsilon_{\theta f}$ et $\epsilon_{\theta m}$) et élastique (ϵ_{ef} et ϵ_{em}) des fibres et de la matrice.
- (c) Ecrire la contrainte σ du composite en fonction des contraintes dans les fibres et dans la matrice (σ_f et σ_m) et de la fraction volumique de fibres f .
- (d) Ecrire les relations de comportement (thermique et élastique) des fibres et de la matrice, en déduire le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique du composite.
- (e) Fibres et matrice sont assemblées à une température T_R de 90°C. En déduire les contraintes dans les fibres et dans la matrice à la température ambiante T_0 .
- (f) Faire l'application numérique

• **Question 2 : Tenue en service**

- (a) Lors de variations de températures de l'ambiante T_0 à la température à l'altitude de croisière T , quelles sont les variations des contraintes dans les fibres et dans la matrice. Quelle peut être la conséquence de ces cycles thermiques.
- (b) Compte tenu de l'existence de contraintes initiales dans le composite, recalculer le critère N°2 dans le matériau composite à l'altitude de croisière et à la température ambiante, en fonction de la fraction volumique de fibres.
- (c) Conclure.

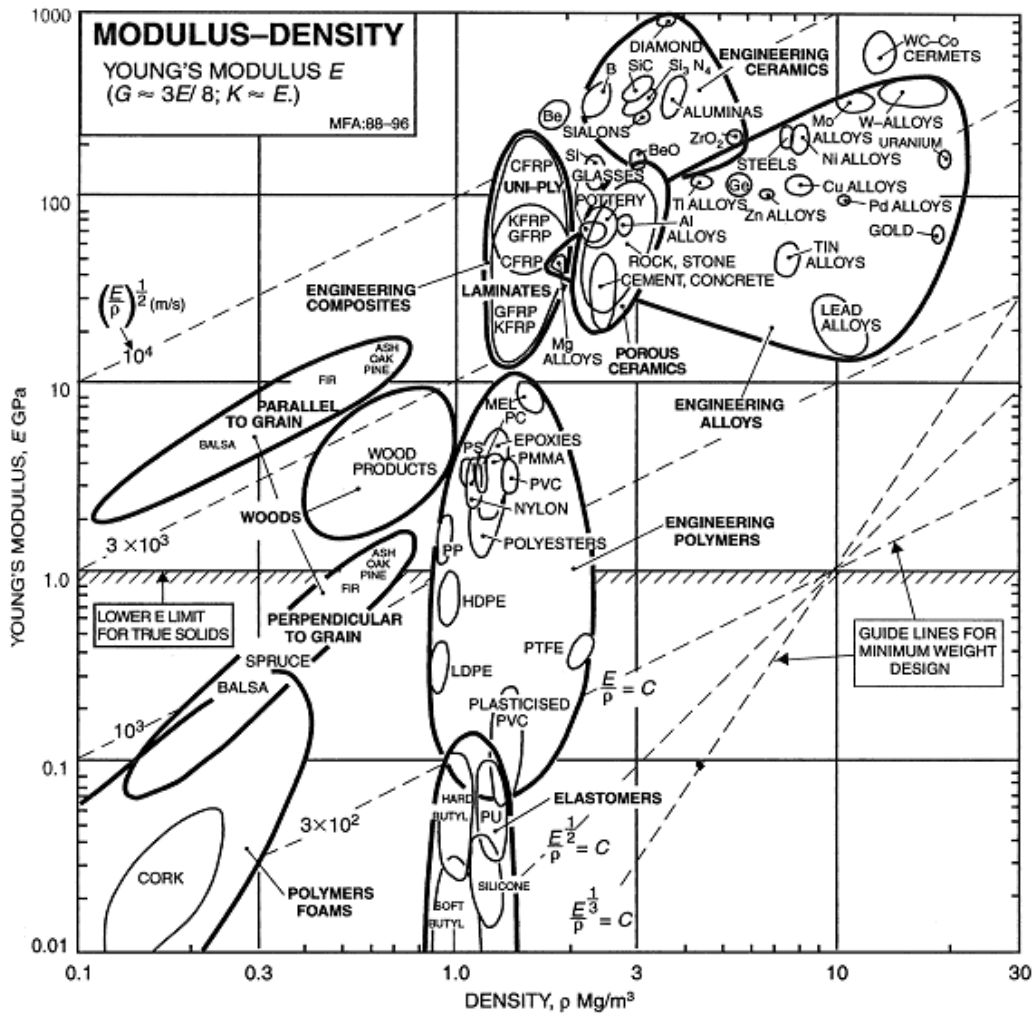
◇ *Données matériau.*

Matériau	Module d'Young (GPa)	Contrainte maximale admissible (MPa)	Masse volumique (kg/m ³)	Critère N°1	Critère N°2
	E	Re	ρ		
Bois d'Orme	9.2	5	460		
Bois Abies Balsamea	6.62	1.3	340		

Aluminum (2024-T6)	72.4	345	2780		
Titane (Ti6Al4V)	113	880	4430		
Acier Maraging	183	1550	8000		
Résine epoxy + silice (thermoducissable)	15	70	1800		
Fibre de carbone isolée	228	3800	1810		
Fibre de verre isolée	69	2900	2440		

(Voir www.matweb.com)

◇ Cartes de propriétés par familles de matériau (Carte d'Ashby) : module-densité.

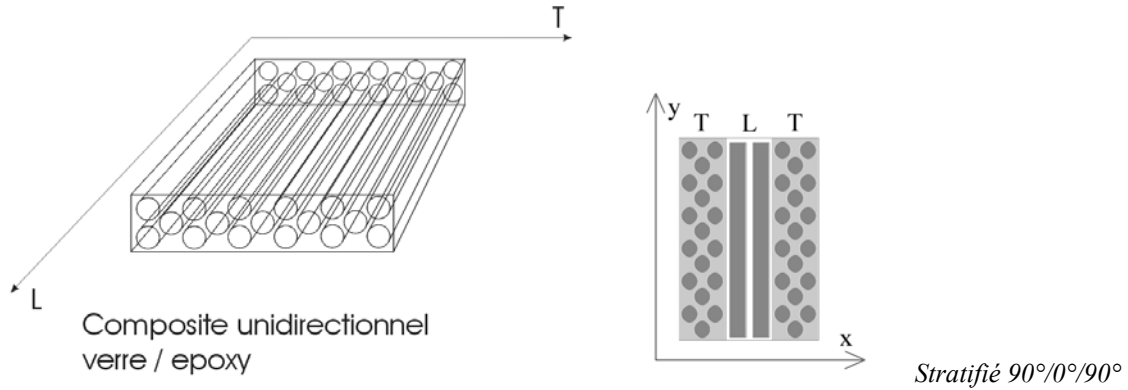


2.8.2 Thermo-élasticité : étude d'un matériau composite stratifié.

Représentation du comportement thermo-élastique d'un matériau composite stratifié à l'aide d'un modèle rhéologique simple. Mise en évidence de contraintes internes héritées du procédé de fabrication.

On constitue un matériau composite stratifié à partir de plis de matériau composite unidirectionnel à 90°/0°/90°. L'assemblage est réalisé à la température de polymérisation de la résine époxy. $T_1=180^\circ\text{C}$, puis on laisse refroidir l'ensemble jusqu'à la température ambiante $T_2=20^\circ\text{C}$. On suppose un collage parfait aux interfaces entre plis de normale x .

Le pli est constitué de fibres de verre dans une matrice de résine époxy, la fraction volumique de fibres de verre est de 50%. On donne le coefficient de dilatation thermique du pli de matériau composite unidirectionnel dans le sens transverse, $\alpha_T = 30 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, et dans le sens des fibres $\alpha_L = \alpha_T / 5$. On donne également les modules d'élasticité du composite unidirectionnel dans le sens transverse $E_T = 10 \text{ GPa}$ et dans le sens des fibres $E_L = 5 E_T$.



On suppose le composite constitué de l'assemblage de trois barreaux équivalents de largeur lz , d'épaisseur lx et de longueur ly travaillant en traction-compression simple dans la direction y . On écrit le problème en 1D, c'est à dire qu'on oublie les déformations dans les directions x et z et on ne se préoccupe que de la direction y .

◇ Question 1 : Etude du comportement du pli – Sens Transverse.

- Proposez un modèle rhéologique simple pour le pli de composite unidirectionnel dans le sens transverse.
- Calculez une expression du module d'élasticité E_T du pli dans le sens transverse, en fonction des modules d'élasticité de la fibre et de la matrice.
- Calculez une expression du coefficient α_T de dilatation thermique du pli dans le sens transverse en fonction des modules d'élasticité et des coefficients de dilatation de la fibre et de la matrice.

◇ Question 2 : Etude du comportement du pli – Sens Long.

- Proposez un modèle rhéologique simple pour le pli de composite unidirectionnel dans le sens des fibres.
- Calculez une expression du module d'élasticité E_L du pli dans le sens des fibres, en fonction des modules d'élasticité de la fibre et de la matrice.
- Calculez une expression du coefficient α_L de dilatation thermique du pli dans le sens des fibres en fonction des modules d'élasticité et des coefficients de dilatation de la fibre et de la matrice.

◇ Question 3 : Comparaison sens long/sens travers

	époxy	Verre E
α	$110 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$	$5 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
E	4.5 GPa	75 GPa

- Calculez le rapport entre E_L et E_T
- Calculez le rapport entre α_L et α_T
- Discutez

◇ Question 4 : Etude du comportement du stratifié

- Proposez un modèle rhéologique simple pour décrire le comportement du stratifié.
- Calculez une expression du module d'élasticité E du stratifié en fonction de E_L et E_T .
- Calculez une expression du coefficient α de dilatation thermique du stratifié en fonction de E_L , E_T , α_L et α_T

◇ Question 5 : Contraintes internes héritées du procédé de fabrication

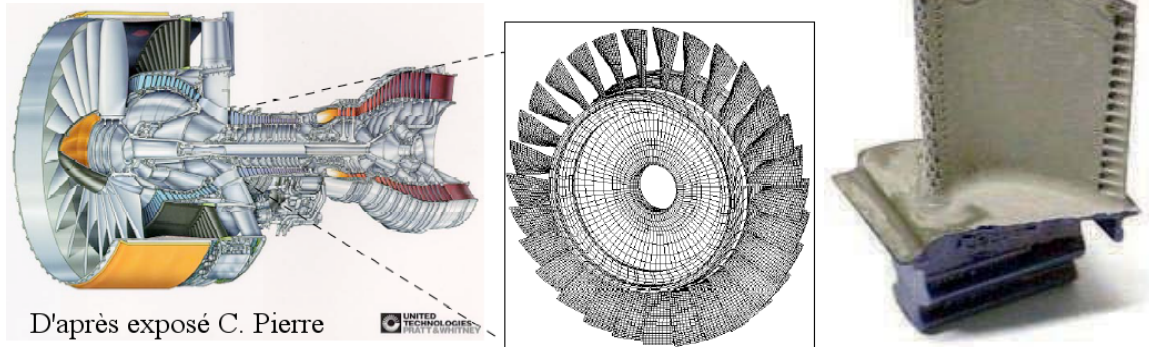
- Le stratifié est assemblé à $T_1=180^\circ\text{C}$ on le laisse ensuite refroidir librement jusqu'à $T_2=20^\circ\text{C}$.
- Calculez la contrainte résiduelle dans le pli central et dans les deux plis externes en fonction de E_L , E_T , α_L et α_T
- Application numérique : $\alpha_T=30.10^{-6}/^\circ\text{C}$, $E_T=10$ GPa, $\alpha_L = \alpha_T/5$ et $E_L=5 E_T$. Calculez σ_T et σ_L à 20°C . Peut-on dans la pratique les négliger ?
- Si le composite n'était constitué que de deux couches 0° et 90° , que se passerait-il lors du refroidissement ? Illustrez votre propos par un schéma.
- Plus généralement, lors de la fabrication d'un composite multicouche comment doit-on répartir les couches dans l'épaisseur pour éviter les gauchissements lors du refroidissement ?

2.8.3 Thermo-élasticité et conduction thermique : Aubes de turbines revêtues.

Les aubes de turbine des réacteurs d'avion subissent des cycles thermomécaniques à chaque vol. L'air entrant dans un réacteur est comprimé par une série de compresseurs (voir la figure ci-dessous). L'air sous pression est mélangé au carburant et explose dans la chambre de combustion. Les disques de turbines sont alors mis en rotation par les gaz de sortie de la chambre de combustion. Ces disques sont montés sur le même arbre que les disques de compresseurs et permettent ainsi de récupérer une partie de la poussée du réacteur pour comprimer l'air à l'entrée du moteur.

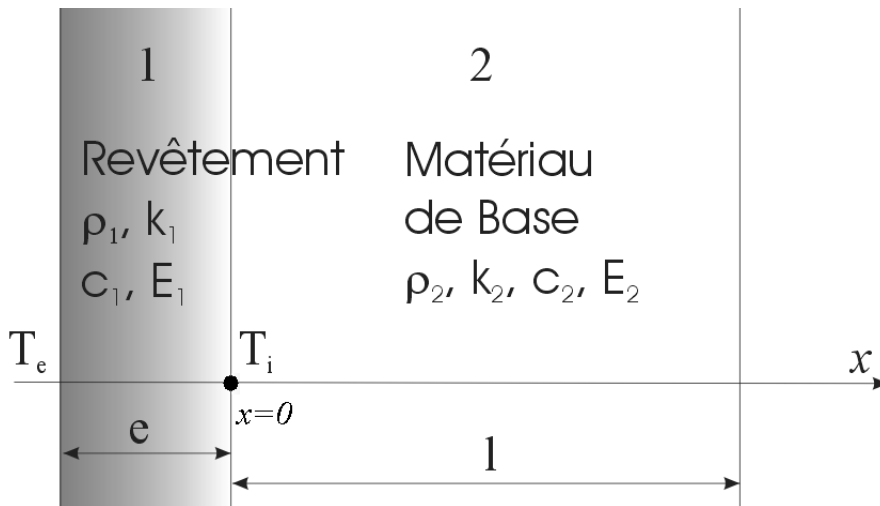
Ainsi les aubes de turbine se trouvent elles plongées dans les gaz de sortie de la chambre de combustion dont la température est supérieure (!) à la température de fusion de l'alliage constituant les aubes. Comme on le voit sur la figure ci-dessous, des systèmes de refroidissement sont prévus afin d'éviter la fusion des aubes. De l'air froid circule à l'intérieur de l'aube et est libéré dans les gaz de combustion, par une série de percages, afin de former une couche d'air « froid » autour de l'aube.

Néanmoins les températures auxquelles sont soumises les aubes restent très élevées et la durée de vie des aubes est conditionnée par le vieillissement du matériau à haute température d'une part et par les cycles marche-arrêt des moteurs d'autre part. Nous allons ici étudier une solution de revêtement thermique des aubes qui permet d'augmenter leur durée de vie. Dans un premier temps, afin de comprendre le rôle du revêtement, nous étudierons la thermique du problème. Puis nous étudierons le couplage thermo-élastique avec revêtement.



◇ Etude du champ de température.

Pour comprendre le rôle du revêtement on étudie d'abord la thermique du problème. Comme les épaisseurs du revêtement et de l'aube sont petites devant la hauteur et la largeur de l'aube, on se limitera ici à étudier un problème 1D (voir la figure ci-dessous). L'interface se trouve en $x=0$.



La température initiale est supposée égale à T_0 partout lorsque le moteur est à l'arrêt. Au démarrage, la température de surface est imposée égale à T_e sur la face externe et est libre sur la face interne de l'aube où circule l'air froid. On cherche à déterminer le champ de température dans l'aube en fonction de la cote x et du temps.

L'équation de la chaleur se réduit ici à :

$$\rho.c. \frac{\partial T}{\partial t} = k. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

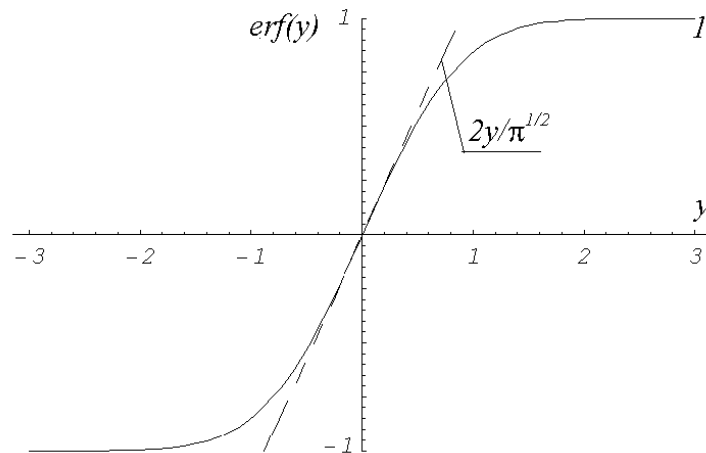
Où t est le temps, T la température à la cote x , ρ la masse volumique, c la capacité calorifique et k la conductibilité thermique. La forme générale de la solution de cette équation est la suivante :

$$T(x,t) = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + B \xrightarrow{x \rightarrow 0} A \frac{x}{\sqrt{\pi at}} + B \quad \text{avec} \quad a = \frac{k}{\rho c}$$

Où A et B sont des constantes d'intégration et où la fonction « erf » est définie par :

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{u=y} e^{-u^2} du$$

Cette fonction présente deux asymptotes, elle tend vers 1 lorsque y tend vers l'infini et vers $2y/\pi$ lorsque y tend vers zéro. Son allure générale est la suivante :



- **Question 1 :** En utilisant la solution exacte, écrire la condition initiale $T=T_0$ partout en déduire l'expression de B_1 et B_2 en fonction de A_1 et A_2 .
- **Question 2 :** En utilisant la solution exacte, écrire la condition aux limites en température sur la face externe ($x=-e$), en déduire l'expression de A_1 .
- **Question 3 :** Au niveau de l'interface, écrire l'égalité des flux entrant dans le domaine 1 et sortant du domaine 2. Comme l'interface est en $x=0$, on peut employer la solution approchée aux alentours de $x=0$. En déduire l'expression de A_2 .
- **Question 4 :** On suppose que t est suffisamment grand pour que l'expression approchée soit valable partout. Exprimer la température moyenne T_{m1} dans le revêtement et T_{m2} dans le métal de base en fonction du temps.
- **Question 5 :** Application numérique, tracer l'allure du champ de température (en utilisant la forme approchée) pour $t=10$ sec et $t=100$ sec (voir les données matériau ci-dessous). Calculez les valeurs de T_{m1} et T_{m2} pour t tendant vers l'infini.

AN : $e=200 \mu\text{m}$, $l=2 \text{ mm}$, $T_0=300^\circ\text{C}$, $T_e=900^\circ\text{C}$.

◇ *Couplage thermo-mécanique.*

On suppose que la température dans le revêtement est homogène égale à $T_0=300^\circ\text{C}$ au sol et à $T_2=900^\circ\text{C}$ en vol, tandis que la température dans le métal de base est égale à 300°C au sol et 600°C en vol. On étudie maintenant le couplage thermo-élastique dans l'aube de turbine revêtue.

- **Question 1 :** Proposer un modèle rhéologique simple pour décrire le comportement de l'aube de turbine revêtue. Ecrire les relations existant entre contrainte et déformation dans le métal de base, dans le revêtement et dans l'assemblage.
- **Question 2 :** Déterminer les contraintes et les déformations dans le métal de base et dans le revêtement au cours d'un cycle thermique.
- **Question 3 :** Discutez les résultats. Quels sont les avantages et les inconvénients d'un revêtement thermique. Sur quels paramètres pourrait-on jouer pour maximiser la protection thermique tout en minimisant le risque de rupture ?

◇ *Données matériau.*

Matériau	Module	Masse volumique	Coefficient de dilatation	Conductibilité	Masse
----------	--------	-----------------	---------------------------	----------------	-------

	d'Young (GPa) E	(kg/m ³) ρ	thermique (K ⁻¹)	thermique (W/mK) k	volumique (J/kgK) c
Revêtement, Alumine, Al₂O₃ poreuse	370	3900	8 × 10 ⁻⁶	3	880
Inconel 718 Superalliage à base de Nickel	165	8190	13 × 10 ⁻⁶	11.4	435

2.8.4 Dilatation Thermique : étude d'un système de compensation thermique

Cette étude concerne le choix de matériau pour la réalisation d'un bras d'horloge à balancier (Pour la culture générale, je vous invite à lire l'article ci-dessous extrait de Pour la Science, concernant la course à la mesure de la longitude et la conception d'une horloge précise par Harrison dès 1759). Dans un premier temps, on s'intéressera à l'incertitude sur la mesure du temps provenant des variations de température, on en déduira une estimation de l'incertitude sur la position à la surface de la terre. Et l'on cherchera à faire un choix de matériau permettant de minimiser ces incertitudes.

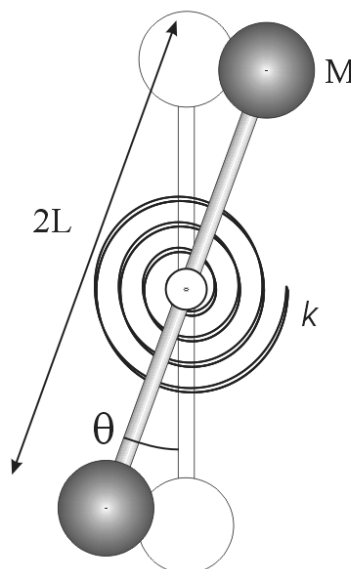
Dans un second temps, on étudiera une solution de compensation thermique, il faudra proposer une solution matériau optimale pour la réalisation du système de compensation thermique.

◇ Oscillation d'un pendule, incertitude sur la mesure du temps.

On considère un pendule de longueur $2L$, portant à des deux extrémités une masse M . Le balancier du pendule a un coefficient de dilatation thermique α . Il est en liaison pivot avec le bâti de l'horloge. Sur cette liaison est également monté un ressort spiral de raideur k .

L'application du théorème du moment dynamique donne pour ce problème :

$$2M.L^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta$$



- **Question 1** : Quelle est la solution de cette équation ? Déterminer la longueur L à donner au balancier pour que sa période d'oscillation soit de 1/2 seconde (on prendra $M=0.1$ kg, $k=7.106.10^{-3}$ Nm/rad).
- **Question 2** : Supposons que la température varie au cours d'une traversée en mer, exprimer la variation de la période d'oscillation en fonction de la variation de température ΔT et du coefficient de dilatation thermique

α du matériau constituant le balancier. Exprimer l'erreur sur la longitude due à la dilatation thermique après 42 jours de mer. Quelle valeur de α doit on choisir pour que l'erreur soit inférieure à un demi-degré (soit 55.6 km à l'équateur) en prenant $\Delta T=30^\circ\text{C}$. Idem pour une erreur de 9.10^{-3}° (1km à l'équateur).

- **Question 3 :** Quelle solution matériau permettrait de réaliser le bras du balancier en minimisant l'erreur sur le temps ? Qu'en pensez vous ?

◇ *Système de compensation thermique.*

Harrison a proposé un système de compensation thermique pour l'horloge H4 constitué d'un bilame courbe. Pour simplifier nous nous limiterons à étudier un système intermédiaire dit « à grill ». De même pour simplifier, on supposera que le système de compensation « remplace » le balancier, ce qui n'est pas tout à fait le cas dans la réalité mais permet de comprendre le fonctionnement du système.

Ce système est constitué de tiges de matériaux présentant des coefficients de dilatation différents. Lorsque la température varie, le déplacement relatif des tiges conduit à la rotation des bras, ce qui permet de minimiser les mouvements du centre d'inertie du balancier. Le système est schématisé sur la Figure 13 (a) il présente deux plans de symétrie. On étudiera donc le comportement d'un quart de l'objet

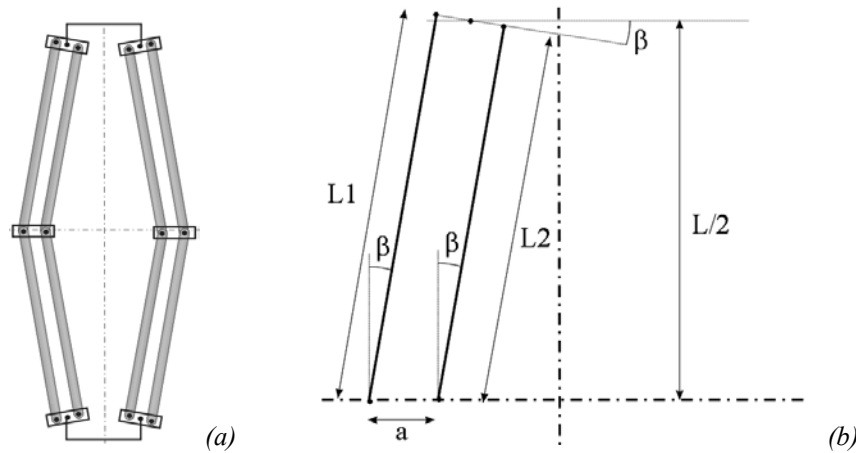


Figure 13 : (a) Schéma du système de compensation thermique, (b) paramétrage du problème

- **Question 1 :** Exprimer l'angle β en fonction de $L1$, $L2$ et a . Puis la longueur du bras du balancier en fonction de β et finalement de $L1$, $L2$ et a . (n.b. $\cos[\arcsin x] = \sqrt{1 - x^2}$). On suppose que α_1 est supérieur à α_2 .
- **Question 2 :** On se donne des dimensions $L1_0$ et $L2_0$ à la température de départ, exprimer $L1$ et $L2$ en fonction de la variation de température ΔT et des coefficients de dilatation α_1 et α_2 de chacun des deux matériaux. Calculez la longueur du bras du balancier en fonction de $L1_0$, $L2_0$, $\Delta\theta$, α_1 et α_2 . On exprimera $L2_0$ et $L1_0$ en fonction de L_0 et de l'angle initial β_0 .
- **Question 3 :** On se donne $\beta_0=27.5^\circ$, et $\Delta T=30^\circ\text{C}$. L_0 est telle que la période de battement soit de 1/2 seconde. On impose $a=8$ mm. Exprimer l'erreur sur la longitude due à la dilatation thermique après 42 jours de mer, en km à l'équateur en fonction de α_1 et α_2 . Et avec $\Delta T=30^\circ\text{C}$.
- **Question 4 :** En utilisant les données du tableau ci-dessous, proposez une solution matériau pour le système de compensation thermique.

◇ *Données matériau.*

Famille	Matériaux	Coefficient de dilatation thermique (K^{-1}) α
Céramique	Diamant	1.2×10^{-6}
Céramique	Fibres de verre	9×10^{-6}

Céramique	Nitrure de Silicium	2.8×10^{-6}
Métal	Acier (Fe + 0.06%C)	12.5×10^{-6}
Métal	Titane	8.6×10^{-6}
Métal	Cuivre	16.6×10^{-6}
Métal	Aluminium	23×10^{-6}
Polymère	PVC thermoplastique	110×10^{-6}
Polymère	PMMA thermoplastique	130×10^{-6}

(Voir www.matweb.com)

◇ *L'épopée du point en mer (extraits de l'article de D. Fauque)*

(Revue Pour la Science N° 321 - juillet 2004, voir aussi http://www.louisg.net/E_navigation.htm)

Au large des côtes, le marin doit connaître sa position. Ce problème n'a reçu de solution satisfaisante qu'au XVIII^e siècle, avec l'avènement d'horloges transportables et précises.

Dès le X^e^{me} siècle, les navigateurs occidentaux et arabo-persans ont su déterminer leur latitude, c'est-à-dire le cercle parallèle à l'équateur sur lequel ils se trouvaient, en mesurant la hauteur de l'étoile polaire ou du Soleil au-dessus de l'horizon. En revanche, plusieurs centaines d'années s'écouleront avant qu'ils ne sachent déterminer leur longitude, c'est-à-dire leur position angulaire à l'Ouest ou à l'Est du port de départ. Cette révolution dans les techniques de navigation, s'est déroulée au cours de la deuxième moitié du XV^e^{me} siècle, grâce aux talents de trois horlogers exceptionnels : John Harrison en Angleterre, Pierre Le Roy et Ferdinand Berthoud en France.

Pour traverser l'océan d'un point à un autre en minimisant les erreurs de localisation, le pilote du navire gagnait le plus rapidement possible le parallèle souhaité et tâchait de s'y maintenir en mettant cap à l'Ouest ou cap à l'Est. Cependant, les imprécisions dans la détermination de la longitude s'accumulaient et pouvaient atteindre plusieurs degrés. De telles erreurs ont causé plusieurs tragédies. En 1714, la reine Anne promulgue le Longitude Act, promettant une récompense de 20 000 livres sterling à qui trouverait le moyen de connaître la longitude en mer à un demi-degré près, après 42 jours de mer ; au niveau de l'équateur, la distance correspondante est d'environ 30 milles nautiques (55,6 kilomètres). C'est une somme énorme (l'équivalent aujourd'hui d'environ deux millions d'euros !), correspondant à l'achat de 13 ou 14 bateaux de 300 tonnes. En 1716, en France, le Régent offre de même une somme de 100 000 livres tournois (de l'ordre de 300 000 euros).

Le problème des longitudes n'est définitivement résolu qu'au cours des années 1760, tant en Grande-Bretagne qu'en France. La solution vient du côté mécanique, avec la mise au point de « garde-temps » précis – des horloges qui résistent en mer aux influences extérieures (mouvements du navire, variations de température ou d'hygrométrie, etc.).

Pourquoi une telle horloge résout-elle le problème des longitudes ? La longitude est l'angle que forme le méridien local avec un méridien choisi comme origine. Pour déterminer la longitude du lieu où l'on se trouve, il suffit d'emporter avec soi deux horloges : l'une qui donne l'heure du méridien d'origine, l'autre qui indique l'heure locale. La différence des temps affichés fournit la longitude. En effet, la Terre effectue un tour sur elle-même, soit 360 degrés, en 24 heures. Une différence de longitude correspond donc à une durée, celle que met la Terre pour tourner de cet angle.

Le principe est déjà bien compris au XVII^e siècle, mais toute la difficulté consiste à réaliser une horloge gardant exactement l'heure du méridien de référence.

Les horloges et montres nécessitaient des améliorations techniques afin d'atteindre la précision requise pour le calcul d'une longitude. Ces améliorations concernaient les systèmes de **compensation thermique**, la lubrification, la recherche d'un meilleur isochronisme (oscillations de durées égales) ou d'un nouveau système d'échappement (le mécanisme qui entretient le mouvement du balancier et transforme ses va-et-vient en un mouvement rotatif des rouages). En effet, durant les voyages au long cours, les importantes variations de température provoquaient des dilatations et contractions successives des diverses pièces mécaniques des horloges, et nuisaient à leur bon fonctionnement. De même, la viscosité de l'huile qui lubrifiait les mécanismes variait selon la température. Enfin, les oscillations des horloges n'étaient en général pas régulières (en mer, une horloge à balancier est sans cesse perturbée par les mouvements du vaisseau).

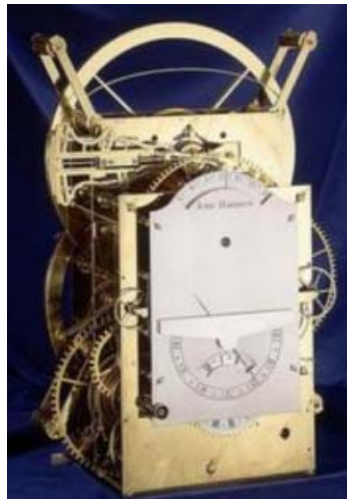
– Harrison, charpentier devenu horloger de génie

La résolution de ces problèmes a demandé beaucoup d'ingéniosité. Par exemple, dès 1726, l'horloger anglais John Harrison invente un dispositif de compensation thermique dit « à gril », constitué de tiges parallèles de métaux différents placés en alternance. Les deux métaux n'ayant pas le même coefficient de dilatation thermique, les tiges se dilatent de telle façon que le centre de gravité du pendule reste inchangé.

Pour pallier les difficultés liées à la lubrification des pièces (viscosité, vieillissement de l'huile), Harrison trouve une solution originale. Ayant d'abord appris le métier de charpentier, il s'est formé en autodidacte à l'horlogerie. En 1720, il a déjà acquis une certaine notoriété dans sa région du Nord de l'Angleterre par ses remarquables horloges à mécanisme en bois. La première horloge marine, H1, qu'il soumet au Board of Longitude en 1735, grâce à l'appui de Georges Graham, un horloger de renom, est une horloge entièrement en bois, utilisant plusieurs essences choisies en fonction du problème mécanique posé. Pour les rouages, par exemple, il a choisi un bois exotique suffisamment gras pour s'autolubrifier, ce qui supprime les difficultés liées à l'utilisation d'huiles.

Testée en 1737 sur un trajet aller-retour d'Angleterre à Lisbonne, l'horloge H1 ne varie pas plus que de quelques secondes par jour. Comme Harrison veut perfectionner son invention, le Board of Longitude ne lui offre qu'une fraction du prix, pour l'aider à poursuivre les recherches. Il construit H2, puis H3, mais c'est avec l'horloge H4, commencée probablement en 1755 sur des principes radicalement différents, qu'il apporte une solution définitive (voir la figure 1). Dès 1753, Harrison s'est fait construire par un horloger londonien, John Jefferys, une montre de poche qui était très proche de H4. Elle comportait plusieurs innovations suggérées par Harrison lui-même : remontoir pouvant être actionné sans que la montre ne s'arrête ou ne tourne à l'envers, **compensation thermique par une lame bimétallique courbe**, système d'échappement à palettes de diamant, etc. Une telle montre de poche ne pouvait servir de chronomètre de marine car sa précision, en raison de la petite taille, était insuffisante. La montre H4, élégant instrument d'environ 13 centimètres de diamètre, en garde cependant les principes.

Achevée à la fin de 1758, H4 fut présentée en 1759 et testée dans un voyage à la Jamaïque en 1761. Le succès fut inespéré. **En neuf semaines de navigation, elle ne varia que de cinq secondes de temps**, soit de 1,25 minute d'arc. Elle entra donc largement dans les conditions du prix.



(H3)



(H4)

Harrison mettra onze ans pour achever H-3.

753 pièces, bande bi-métallique compensant les changements de température, nouveau système anti-friction, 7 kilos de moins que H-1, deux balanciers circulaires, réduite en dimensions, telle est H-3. Parce que Harrison a fait la connaissance de John Jefferys, horloger, qui lui fabrique une montre de gousset. Conçue d'après des indications d'Harrison en personne, elle est d'une fiabilité jamais connue à cette époque. Harrison est persuadé que l'avenir est aux "petites machines" et se met à la conception de H-4. Harrison achèvera en 1759 la construction de H-4. 13 centimètres de diamètre, trois aiguilles d'acier qui donnent l'heure exacte, diamants et rubis pour supprimer la friction, 30 heures entre deux remontages, telle est H-4. Une bête de concours. Le dernier essai, vers la Barbade en 1764 fit ressortir 15 secondes de retard en 5 mois de voyage.

3 COMPORTEMENT VISQUEUX, EXEMPLE DES MATERIAUX POLYMERES

3.1 Introduction

Un comportement est qualifié de visqueux si les efforts ou les contraintes dépendent de la vitesse de déplacement ou de déformation. En général le comportement visqueux est l'apanage des fluides. Cependant, les solides déformables de manière irréversible (métaux, polymères thermoplastiques, pâtes, gels ...) sont également susceptibles de présenter une sensibilité à la vitesse. Cette sensibilité à la vitesse dépend fortement de la température. Ainsi pour les matériaux métalliques sollicités à froid la sensibilité à la vitesse est généralement négligeable, leur sensibilité à la vitesse n'apparaît qu'au-delà de $T = 0.5 T_f$. Les pâtes, les gels présentent généralement un comportement visqueux à la température ambiante (fluage du béton au jeune âge), les matériaux polymères présentent un comportement principalement visqueux au-delà de leur température de transition vitreuse T_g , mais à température ambiante des transitions de comportement.

Dans un premier temps, nous définirons le comportement visqueux en général, ce qu'est la viscosité, comment la caractériser, comment modéliser le comportement visqueux en 1D à l'aide de modèles rhéologiques et plus généralement en 3D à l'aide d'une loi de comportement.

Dans un second temps, nous étudierons les relations entre la structure du matériau et les propriétés de celui-ci. Ces relations seront illustrées par le cas des matériaux polymères. Nous rappellerons quelques généralités sur les matériaux polymères, puis nous verrons les relations entre la structure du matériau à différentes échelles (échelle moléculaire, échelle macromoléculaire et échelle morphologique) et sa viscosité.

3.2 Le Comportement Visqueux

Une déformation purement visqueuse s'effectue sans changement de volume, la contrainte dépend de la vitesse de déformation.

3.2.1 La viscosité d'un matériau

Divers dispositifs expérimentaux permettent de soumettre le matériau à une vitesse de déformation imposée. On peut, par exemple, imposer une vitesse de déformation de cisaillement constante en imposant une vitesse constante à la face supérieure d'un domaine et une vitesse nulle à la face inférieure (Figure 14).

Le champ de vitesse s'écrit comme suit : $\vec{v}(x, y) = V \left(\frac{y}{h} \right) \vec{e}_x$, où \vec{e}_x est le vecteur unitaire porté par l'axe x , et V la vitesse de la face supérieure du domaine.

Alors la vitesse de déformation s'écrit comme suit (voir cours de MMC) :

$$D = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T \right) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{e_x, e_y, e_z} = \gamma/2 \left(\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x \right) \quad \text{avec } \gamma = V/h$$

La vitesse de déformation est constante dans l'épaisseur du matériau. On notera $\tau = F/A$ la contrainte de cisaillement exercée sur la face supérieure du domaine.

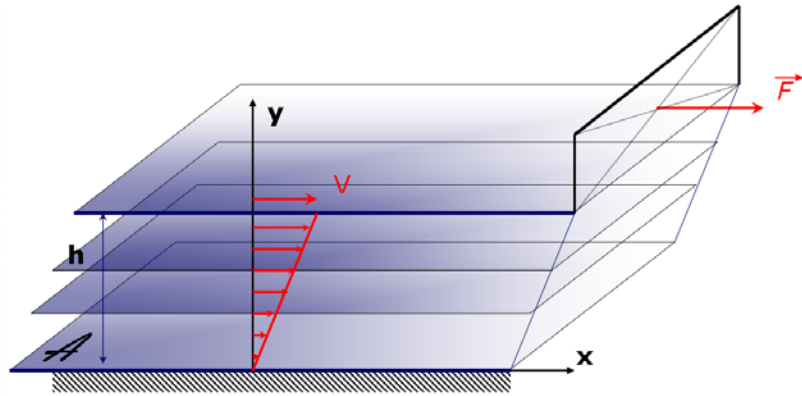


Figure 14 : Champ de vitesse dans un domaine de hauteur h entre deux plans, le plan inférieur est fixe, le plan supérieur se déplace à la vitesse V , on exerce une force tangentielle F sur ce plan.

La vitesse de déformation du matériau est imposée et on mesure la contrainte de cisaillement correspondante. Après une phase d'adaptation du matériau, il est généralement observé que la contrainte évolue linéairement en fonction de la vitesse de déformation.

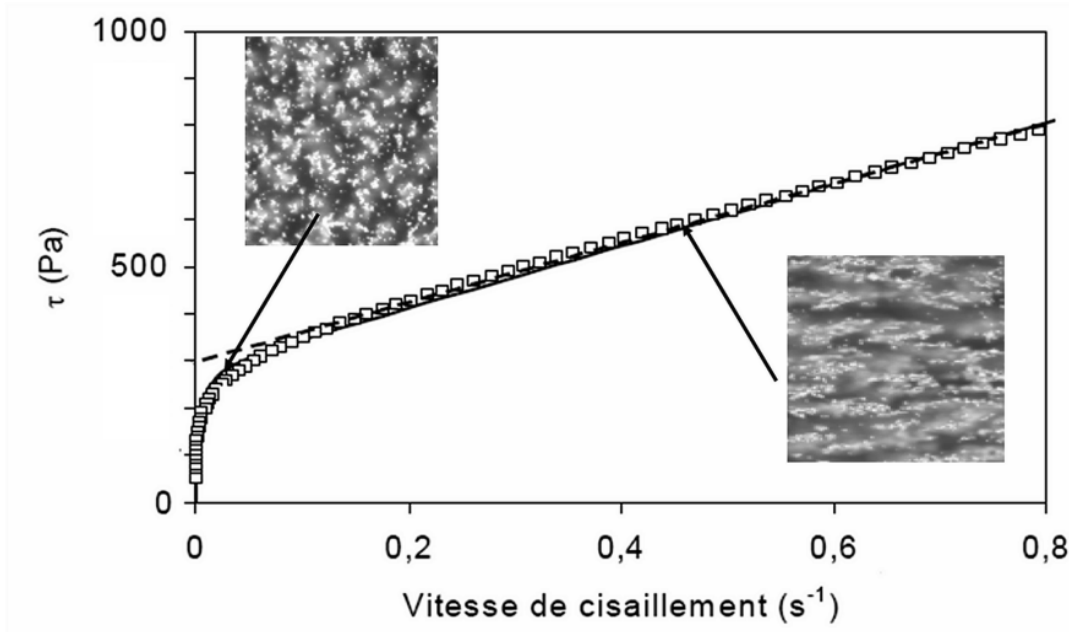


Figure 15 : Illustration, évolution de la contrainte de cisaillement τ en fonction de la vitesse de déformation de cisaillement $\dot{\gamma}$, dans une pâte.

On définit alors la viscosité η comme la pente instantanée de cette courbe, ou en première approximation, le rapport entre la contrainte de cisaillement et la vitesse de déformation de cisaillement :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left. \frac{d\tau}{d\dot{\gamma}} \right|_{\dot{\gamma}}$$

La viscosité s'exprime donc en Pa.s. La viscosité d'un matériau dépend de sa nature chimique comme de sa morphologie (Figure 16).

Lorsqu'on étudie la viscosité d'un matériau sur une grande plage de vitesses de déformation, (plusieurs décades) plusieurs types d'évolutions sont observés. Lorsque la viscosité est constante, le comportement est dit newtonien, lorsque la viscosité diminue tandis que la vitesse augmente, le comportement est dit rhéo-fluidifiant (Figure 16), enfin lorsque la viscosité augmente tandis que la vitesse augmente, le comportement est dit rhéo-épaississant.

Il est important de souligner qu'un matériau présentant un comportement visqueux, n'est pas élastique au sens thermodynamique du terme. Si l'on charge, puis décharge le matériau (Figure 14), la puissance instantanée se calcule comme suit :

$$P(t) = F.V = \mathcal{A} h \tau . \dot{\gamma} = (\mathcal{A} h) \eta (\dot{\gamma}^2)$$

La densité de puissance fournie au le matériau est égale à $(\eta . \dot{\gamma}^2)$ et est donc toujours positive. Au cours d'une transformation quelconque, le matériau visqueux dissipe toujours de l'énergie.

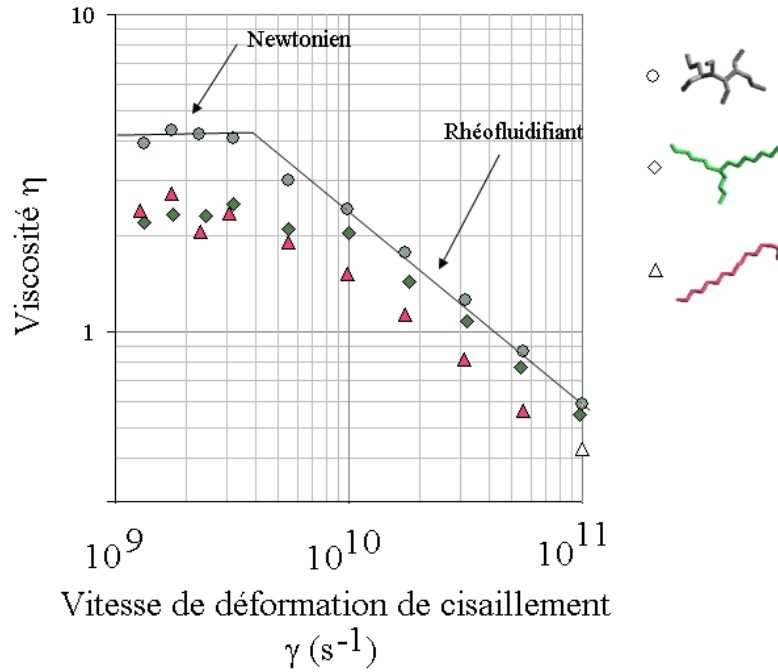


Figure 16 : Evolution de la viscosité η en fonction de la vitesse de déformation de cisaillement $\dot{\gamma}$, à 40°C, pour un polymère poly-alpha-oléfin, trois morphologies sont étudiées, le polymère linéaire, le polymère en étoile et le polymère fortement branché (L. I. Kioupis and E. J. Maginn, *Journal of Physical Chemistry B*, 1999, 103, 10781-10790).

3.2.2 Méthodes de Caractérisation

Il existe plusieurs familles d'essais mécaniques permettant de caractériser le comportement visqueux, ou tout du moins la partie visqueuse du comportement d'un matériau.

Lorsque le matériau est assez fluide (pâtes, gels, polymères fondus) on pourra utiliser des rhéomètres. Il en existe de différents types en fonction des gammes de vitesse étudiées.

Lorsque le matériau est plutôt solide, on pourra réaliser des essais de fluage ou de relaxation (métaux à haute température). On pourra également employer une méthode de caractérisation appelée spectrométrie mécanique.

◇ Rhéomètres

Dans la pratique, pour caractériser la viscosité d'un matériau, il faut être capable d'appliquer une vitesse de déformation constante au matériau. Si le matériau est plutôt fluide il faudra le confiner dans une enceinte (Figure 17).

Les rhéomètres plan-plan, cône-plan et la cellule de Couette, fonctionnent tous les trois selon le principe suivant. La partie inférieure est fixe et la partie supérieure tourne à une vitesse imposée, que l'on peut faire varier. On mesure le couple transmis, ce qui permet de déterminer la contrainte de cisaillement.

La difficulté est de garder le fluide à l'intérieur du dispositif d'essai tout en appliquant une vitesse de déformation de cisaillement homogène dans le matériau. Lorsque le matériau est très fluide, on préférera employer la cellule de Couette. En revanche lorsque le matériau est plus visqueux, on utilisera

les rhéomètres plan-plan et cône plan. Le rhéomètre cône plan permet d'avoir effectivement une vitesse de déformation homogène dans le matériau, tandis qu'elle varie en fonction du rayon dans le cas du rhéomètre plan-plan.

Enfin pour travailler avec des matériaux très fluides et pour de très grandes vitesses de déformation, un autre moyen de mesure est utilisé, le rhéomètre capillaire, qui consiste à injecter un fluide dans un capillaire (tube de faible diamètre) avec une pression donnée et de mesurer la chute de pression en fonction de la distance le long du tube depuis le point d'injection.

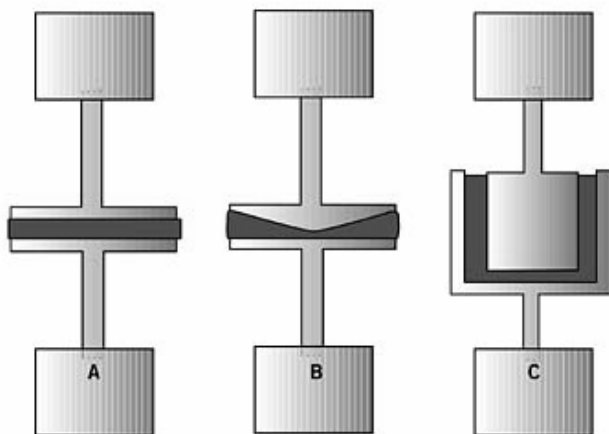


Figure 17 : Illustration, différents types de rhéomètres, A le rhéomètre plan-plan, B le rhéomètre cône-plan et C la cellule de Couette.

◇ Essai de fluage, essai de relaxation

Lorsque la viscosité du matériau est suffisamment élevée, on pourra réaliser des éprouvettes et les solliciter à l'aide de moyens d'essais classiques. Essais de traction, de torsion, de compression etc...

Deux essais sont classiquement conduits pour examiner la dépendance à la vitesse du comportement des matériaux solides, l'essai de fluage et l'essai de relaxation.

Au cours d'un essai de fluage, on fixe la contrainte appliquée sur le matériau et on suit l'évolution de sa déformation au cours du temps (Figure 18).

Au cours d'un essai de relaxation, on fixe la déformation du matériau et on suit l'évolution de la contrainte au cours du temps.

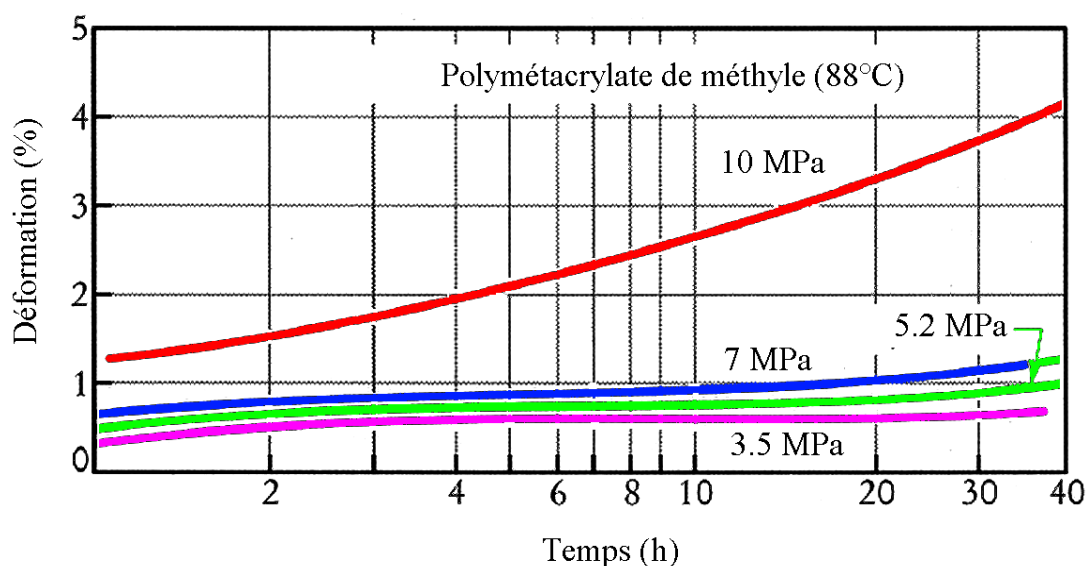


Figure 18 : Essai de fluage sur un polymère de méthacrylate de méthyle. La contrainte imposée est fixée à 3.5, 5.2, 7 ou 10 MPa et on suit l'évolution de la déformation en fonction du temps.

◇ Spectrométrie mécanique

Cet essai est employé pour caractériser le comportement des matériaux visco-élastiques sous de très faibles niveaux de contrainte. On soumet un échantillon à une sollicitation cyclique de pulsation ω . En pratique, l'éprouvette est généralement un filament qui travaille en torsion alternée.

Au cours de l'essai, contrainte et déformation cyclique sont mesurées. On peut observer un déphasage ϕ entre les deux signaux, appelé angle de frottement intérieur, qui est nul si le matériau est purement élastique mais devient non nul si le matériau présente de la viscosité.

$$\sigma = \sigma_a \sin(\omega t) \quad \text{alors} \quad \varepsilon = \varepsilon_a \sin(\omega t + \phi)$$

La densité de puissance instantanée se calcule comme suit :

$$P = \sigma \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Et la densité moyenne de puissance sur une période se calcule comme suit :

$$P_{\text{moy}} = \frac{\omega}{2\pi} \int_{t=0}^{t=2\pi/\omega} \left(\sigma \frac{d\varepsilon}{dt} \right) dt$$

Ainsi, si les signaux sont déphasés on trouve alors :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \gamma_o \sigma_o \omega \sin(\phi)$$

La puissance extérieure moyenne fournie au matériau est nulle si le déphasage est nul. Le système est alors élastique au sens thermodynamique du terme. Le déphasage permet de quantifier la dissipation d'énergie et est donc à relier à la viscosité du matériau.

L'essai est qualifié de spectrométrie mécanique, car on peut déterminer le déphasage ϕ en fonction de la fréquence de la sollicitation $f = \omega/2\pi$. Ceci permet d'identifier les fréquences caractéristiques associées aux divers mécanismes dissipatifs dans un matériau.

On note ainsi que pour un verre (Figure 19), le comportement est purement élastique si la fréquence de sollicitation est supérieure à 10^{-3} Hz. En revanche, à très faible vitesse, le verre est susceptible de présenter un comportement visqueux. Le verre peut donc être considéré comme un fluide visqueux sur des échelles de temps très longues. On observe ainsi que les vitraux des cathédrales ont « coulé » au cours du temps.

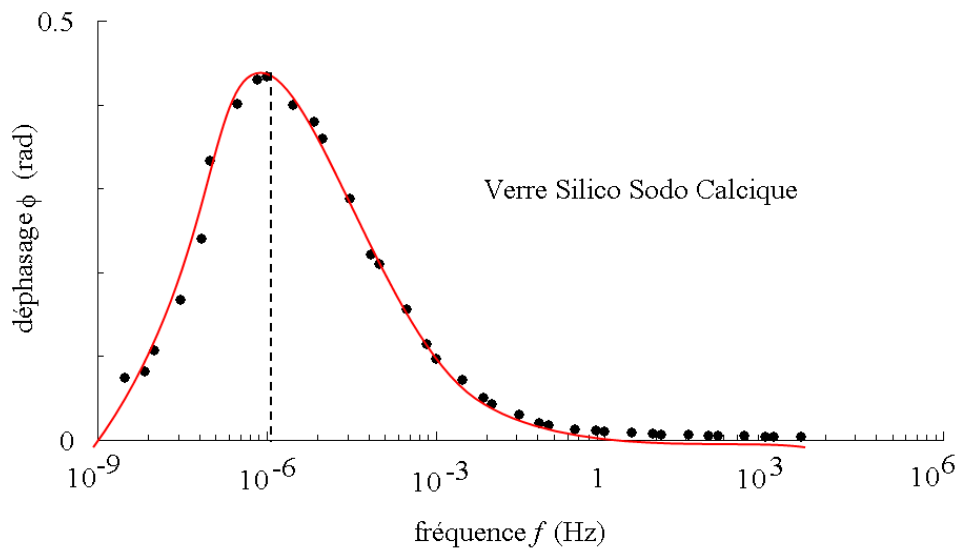


Figure 19 : Essai « simulé » de frottement interne, ou spectrométrie mécanique sur un verre Silico-Sodo-Calcique. (d'après J.M. Pelletier Ecole d'été GDR « Verres ») Résultat issu de simulations ab-initio.

3.2.3 Modèles Rhéologiques

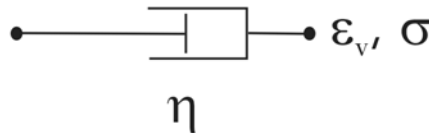
Comme pour l'élasticité et la dilatation thermique, des modèles rhéologiques sont définis afin d'étudier la réponse de matériaux à des sollicitations thermo-mécaniques à vitesse variable. On emploie généralement ces représentations simplifiées à des fins d'analyse. Une fois que les mécanismes sont bien compris, pour simuler le comportement mécanique d'une structure constituée d'un matériau donné, il devient nécessaire de définir une loi de comportement, qui est la forme généralisée de ces modèles rhéologiques unidirectionnels.

◇ Comportement newtonien

Lorsque le comportement visqueux est newtonien, c'est-à-dire, que la viscosité est constante et ne dépend pas de la vitesse de déformation la relation suivante pourra être employée pour lier la contrainte à la vitesse de déformation visqueuse:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon_v}{dt}$$

Le symbole suivant est employé pour représenter un comportement visqueux newtonien en uniaxial :



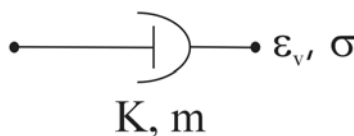
◇ Comportement non-newtonien

Lorsque le comportement visqueux est non-newtonien, c'est-à-dire, que la viscosité dépend de la vitesse de déformation la relation suivante pourra être employée pour lier la contrainte à la vitesse de déformation visqueuse:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon_v}{dt} \quad \text{avec} \quad \eta = K \left| \frac{d\varepsilon_v}{dt} \right|^{m-1}$$

Où K est appelé l'indice de consistance du matériau et m son indice de pseudo-plasticité.

Le symbole suivant est employé pour représenter un comportement visqueux non-newtonien en uniaxial :



n.b. si m est égal à zéro c'est-à-dire une viscosité inversement proportionnelle à la vitesse, la contrainte est alors constante. Le matériau est alors dit pseudo-plastique, il présente des déformations irréversibles, mais la contrainte d'écoulement devient indépendante de la vitesse, d'où le terme de pseudo-plastique.

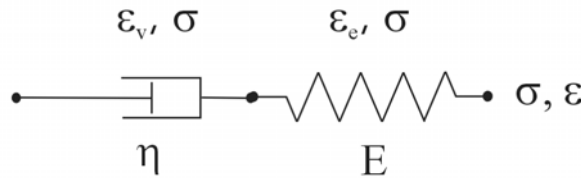
◇ Assemblages

Les modèles rhéologiques permettent d'analyser le comportement de matériaux complexes. Des assemblages de comportement pourront être mis en œuvre afin de comprendre le comportement de matériaux hétérogènes ou présentant en tout cas plusieurs mécanismes de déformation. On donne ci-dessous deux exemples d'assemblages simples de comportement, mais beaucoup d'autres pourront être imaginés.

- Comportement visco-élastique, assemblage série : modèle de Maxwell

Si le matériau est susceptible de présenter à la fois une déformation visqueuse et une déformation élastique, son comportement sera visco-élastique. Si les déformations élastique et visqueuses s'ajoutent, on pourra représenter le comportement du matériau à l'aide d'un assemblage en série, cet assemblage est appelé modèle de Maxwell :

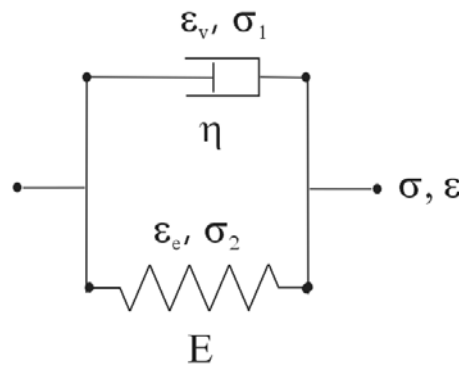
$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \quad \text{avec} \quad \sigma = E\varepsilon_e \quad \text{et} \quad \sigma = \eta \frac{d\varepsilon_v}{dt}$$



- Comportement visco-élastique, assemblage parallèle : modèle de Kelvin-Voigt

On peut également assembler les comportements élémentaires en parallèle, cet assemblage est appelé le modèle de Kelvin-Voigt :

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v \quad \text{avec} \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \sigma_2 = E\varepsilon_e \quad \text{et} \quad \sigma_1 = \eta \frac{d\varepsilon_v}{dt}$$



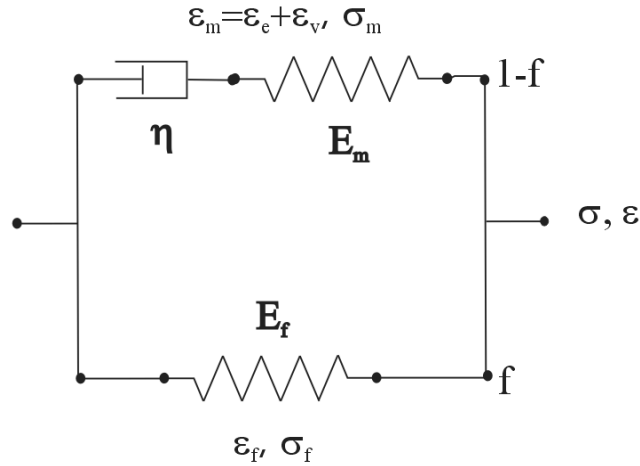
La pertinence d'un assemblage par rapport à un autre dépend de la structure du matériau. Cet aspect sera abordé au paragraphe (3.4) et au cours de problèmes à la fin de ce chapitre (3.6.3).

Pour ces deux modèles, on suppose implicitement que le matériau est à la fois visqueux et élastique, tout comme il pourrait présenter une dilatation thermique, une déformation élastique et une déformation visqueuse. Ceci explique pourquoi on n'a pas précisé de fraction volumique associée à chacun des comportements élémentaires.

En revanche lorsqu'on utilise des modèles rhéologiques pour décrire le comportement de matériau hétérogènes, il faut alors préciser la fraction volumique de chacun des constituants lors de l'assemblage.

- Matériau hétérogène, exemple d'assemblage parallèle

On peut vouloir représenter par exemple le comportement d'un matériau composite, contenant des fibres qui restent élastiques dans une matrice visco-élastique, l'assemblage pourrait alors être le suivant pour le matériau composite sollicité dans le sens des fibres :



En notant f la fraction volumique de fibres, et avec un indice f ce qui concerne les fibres et un indice m la matrice.

Alors pour ce composite :

$$\varepsilon = \varepsilon_m = \varepsilon_f \quad \text{et} \quad \sigma = f\sigma_f + (1-f)\sigma_m$$

3.2.4 Loi de comportement

Les modèles rhéologiques, unidirectionnels permettent de comprendre les tendances générales du comportement d'un matériau hétérogène ou complexe en fonction de la déformation, de la vitesse de déformation, des variations de température etc.... Mais une fois le comportement du matériau bien compris, il faut pouvoir le modéliser correctement afin d'en tenir compte lors des calculs de structure. Les sollicitations réelles sont à priori multiaxiales, et il faut donc établir une loi de comportement 3D pour représenter le comportement visqueux élémentaire.

◇ Définition des grandeurs employées

La loi de comportement visqueuse élémentaire la plus simple donne l'expression de la contrainte de Cauchy en fonction de la vitesse de déformation visqueuse.

Si \mathbf{v} est le champ de vitesse, la vitesse de déformation visqueuse \mathbf{D} s'exprime comme suit :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T \right)$$

Comme on le verra par la suite, la déformation visqueuse résulte de glissements relatifs entre les constituants du matériau. La déformation visqueuse s'effectue donc sans changement de volume, le matériau purement visqueux est incompressible.

Cette condition s'écrit comme suit en fonction du tenseur des vitesses de déformation visqueuse :

$$\text{Tr} \underline{\underline{\mathbf{D}}} = 0$$

Compte tenu de l'expression du tenseur des vitesses de déformation visqueuse \mathbf{D} en fonction du champ de vitesse, l'incompressibilité s'écrit aussi :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

Comme la déformation visqueuse s'effectue sans changement de volume, la loi de comportement visqueuse élémentaire lie la part de cisaillement du tenseur des contraintes au tenseur des vitesses de déformation visqueuse.

Cette part de cisaillement, est appelée le déviateur des contraintes σ_D et s'exprime comme suit en fonction du tenseur des contraintes, en notant p la pression hydrostatique régnant dans le matériau :

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = \underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{I}} \quad \text{avec} \quad p = -\frac{\text{Tr}\underline{\underline{\sigma}}}{3}$$

◇ *Comportement newtonien*

Il suffit maintenant de généraliser la notion de viscosité (§ 3.2.1) à une déformation visqueuse multiaxiale pour écrire la loi de comportement du matériau visqueux :

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = 2\underline{\underline{\eta}}\underline{\underline{D}} \quad \text{avec} \quad \text{Tr}\underline{\underline{D}} = 0$$

Ou encore

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{\eta}}\underline{\underline{D}} \quad \text{avec} \quad p = -\frac{\text{Tr}\underline{\underline{\sigma}}}{3} \quad \text{et} \quad \text{Tr}\underline{\underline{D}} = 0$$

La pression reste donc indéterminée. Si le comportement est purement visqueux, c'est la relation complémentaire d'incompressibilité et les conditions aux limites qui permettront de la déterminer.

Dans le cas général d'un comportement visco-élastique, on pourra, comme avec les modèles rhéologiques, assembler un comportement visqueux et un comportement élastique. La relation entre la pression et le changement de volume proviendra de la compressibilité élastique du matériau.

◇ *Comportement non-newtonien*

Lorsque la gamme de vitesse de déformation est importante, il est parfois nécessaire de prendre en compte l'évolution de la viscosité en fonction de la vitesse. Lors des essais (uniaxiaux) en cisaillement pur, l'indice de consistance \mathbf{K} et l'indice de pseudo-plasticité \mathbf{m} sont identifiés, on a alors :

$$\tau = \eta \frac{d\gamma}{dt} \quad \text{avec} \quad \eta = K \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^{m-1}$$

La viscosité étant une valeur scalaire, la généralisation de son expression en fonction de la vitesse de déformation impose de définir une valeur scalaire à partir du tenseur des vitesses de déformation visqueuse $\underline{\underline{D}}$, appelée vitesse de déformation équivalente $\underline{\underline{D}}_{eq}$.

Si le matériau est isotrope, la déformation équivalente $\underline{\underline{D}}_{eq}$ peut être définie à partir des invariants de $\underline{\underline{D}}$, comme le premier invariant $\text{Tr}\underline{\underline{D}}$ est nul, du fait de l'incompressibilité, on utilisera le second invariant :

$$D_{eq} = \sqrt{2\text{Tr}\underline{\underline{D}}^2} = \sqrt{2(\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}})}$$

Le coefficient 2 permet de s'assurer que dans le cas particulier du cisaillement pur :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{\dot{\gamma}}{2} (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x) \Rightarrow D_{eq} = 2 \sqrt{2 \left(\frac{\dot{\gamma}^2}{4} + \frac{\dot{\gamma}^2}{4} \right)} = \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|$$

La loi de comportement pour le matériau purement visqueux et non-newtonien pourra donc s'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{\eta}}\underline{\underline{D}} \quad \text{avec} \quad p = -\frac{\text{Tr}\underline{\underline{\sigma}}}{3} \quad \text{et} \quad \text{Tr}\underline{\underline{D}} = 0$$

$$\text{Et } \eta = K D_{eq}^{m-1} \quad \text{avec} \quad D_{eq} = \sqrt{2\text{Tr}\underline{\underline{D}}^2}$$

3.3 Structure des matériaux polymères à différentes échelles

Tous les matériaux polymères présentent une large gamme de comportement mécanique, élastiques fragiles, ils deviennent plastiques, puis visco-élastiques, puis encore caoutchoutiques et enfin purement visqueux au fur et à mesure que la température augmente. Toutes ces transitions de comportement se produisent dans une plage de température assez étroite, typiquement entre -30°C et $+200^{\circ}\text{C}$. Ces transitions de comportement sont fortement liées à la structure du matériau et varient significativement d'un polymère à l'autre. Ce paragraphe vise à décrire brièvement la structure des matériaux polymères à différentes échelles, l'échelle moléculaire, l'échelle macro-moléculaire et enfin l'échelle morphologique. A chacune de ces échelles nous nous limiterons à discuter quelques éléments qui sont connus pour avoir un fort impact sur le comportement du matériau.

3.3.1 Généralités

Les matériaux polymères sont constitués de molécules géantes (macromolécules) organiques (atomes de carbone, d'oxygène, d'hydrogène et d'azote) sur lesquelles peuvent être greffées des radicaux (fluor, soufre, silicium etc...).

Les liaisons entre les atomes d'une macromolécule sont des liaisons covalentes. Ces liaisons covalentes (par exemple la liaison C-H), sont souvent dissymétriques, elles portent alors un dipôle électrique (§ 2.2).

Ces dipôles sont à l'origine d'interactions électrostatiques entre macromolécules. Ces interactions, appelées liaisons faibles, assurent la cohésion du matériau. Lorsque la température augmente, ces liaisons faibles « fondent » les premières. Leur température de fusion est appelée T_g , la température de transition vitreuse du polymère.

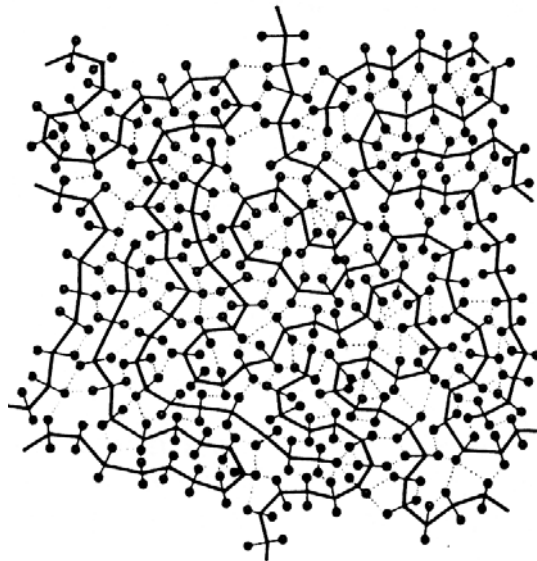
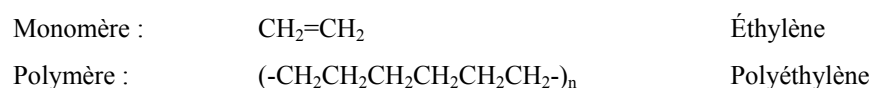


Figure 20 : Schéma d'un polymère linéaire amorphe : Les liaisons covalentes, fortes, sont en trait plein, les liaisons secondaires, faibles, sont en pointillés. Lorsqu'on sollicite mécaniquement le polymère en dessous de T_g ce sont les liaisons secondaires qui s'étirent. (M.F Ashby, D.R.H Jones, Matériaux et microstructure Dunod)

3.3.2 Echelle moléculaire

Un polymère est une macromolécule dans laquelle un même motif est répété, le monomère. On peut constituer, des dimères, trimères etc.. et finalement un polymère.

Par exemple dans le cas du polyéthylène :



Ou dans le cas du polyéthylène glycol :

Monomère :	HO-CH ₂ CH ₂ -OH	Éthylène glycol
Dimère :	HO-CH ₂ CH ₂ -O-CH ₂ CH ₂ -OH	Diéthylène glycol
Polymère :	(-O-CH ₂ CH ₂ -O-CH ₂ CH ₂ -O-CH ₂ CH ₂ -) _n	Polyéthylène glycol

La structure moléculaire contribue au comportement mécanique du matériau à travers deux propriétés principales

- (1) La dissymétrie électrique ou polarité, qui est la source des liaisons faibles entre macro-molécules.
- (2) La rigidité à l'échelle moléculaire, qui est liée aux interactions entre atomes d'une même macromolécule.

◇ Polarité.

La polarité d'une liaison, ou d'un groupement provient de la structure électronique des atomes constituant le groupement. Elle joue principalement sur l'énergie de cohésion (l'énergie à fournir pour fondre le matériau) et sur le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique. Elle joue moins sur la viscosité qui résulte d'interactions à l'échelle macromoléculaire. Dans le tableau suivant est reportée une indication de la polarité de quelques groupements, et l'énergie de cohésion du matériau correspondante.

groupement	Indicateur de « polarité »	Energie de cohésion (J.mol ⁻¹)
-CH ₃	5.64	9640
-CH ₂ -	4.65	4190
-CN-	11	25000
-COO-	15	13410
-CO-NH-	30	60760

◇ Rigidité moléculaire

La rigidité à l'échelle moléculaire provient des interactions entre atomes à l'intérieur d'une molécule. Elle conditionne les mouvements que peut présenter une molécule, sous l'effet de l'agitation thermique par exemple, ou lors de l'application d'une contrainte.

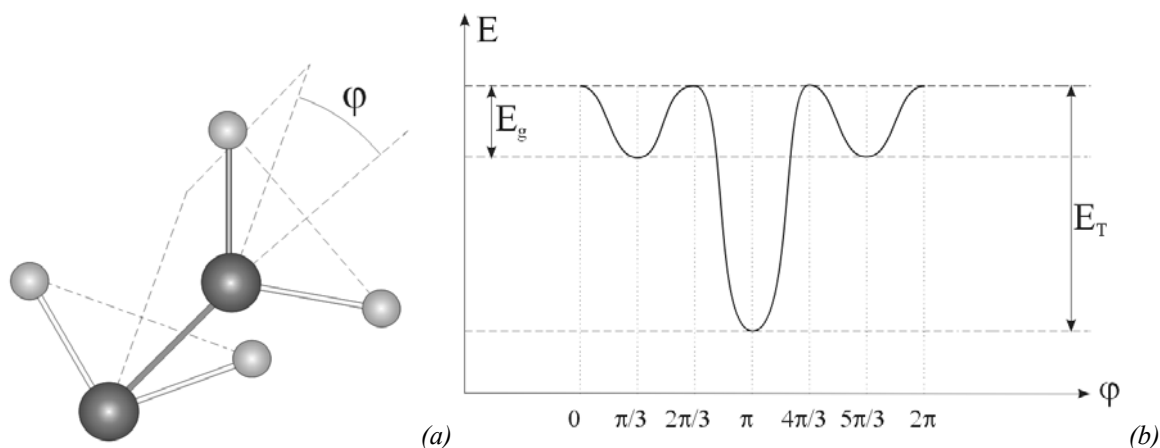


Figure 21 : (a) Illustration d'interactions électrostatique entre groupement -CH₂- polarisés d'une même macromolécule. Les radicaux se repoussent. (b) On peut associer une énergie potentielle d'interaction à l'angle φ , il existe une position d'énergie minimum, et des configurations intermédiaires. Si l'on fournit suffisamment

d'énergie ($E > E_T$) la macromolécule pourra alors prendre diverses configurations, entre lesquelles existe un col d'énergie (E_g)

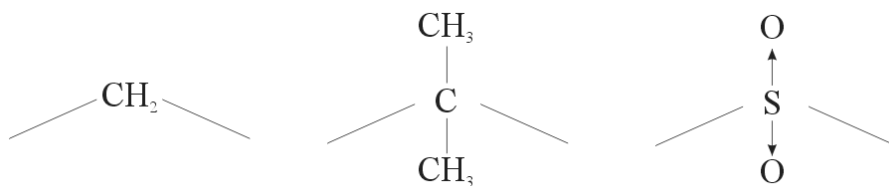
Si l'on considère, par exemple, le polyéthylène $(-CH_2-)_n$, la liaison C-H est polarisée électriquement et les groupements CH_2 du monomère interagissent donc entre eux. Les atomes d'hydrogène se repoussent. La position relative des atomes n'est donc pas quelconque (Figure 21), il existe une énergie potentielle d'interaction E associée à l'angle φ que forment les groupements. En opposition, $\varphi=\pi$, elle est minimale, c'est la configuration que la molécule adopte au repos. Si l'on fournit à la molécule une énergie suffisante (E_T), sous forme thermique ou mécanique, elle pourra alors adopter d'autres configurations ($\varphi=\pi/3$, $\varphi=\pi$, $\varphi=5\pi/3$). La molécule se « tortille ».

Lorsque la molécule est en mouvement, le groupement peut être assimilé à un système masse ressort (masse des atomes d'hydrogène en rotation, et ressort associé à l'énergie d'interaction électrostatique). Si l'énergie de la molécule est constante, il peut néanmoins se produire des transferts d'énergie, l'énergie potentielle augmente quand l'énergie cinétique diminue et réciproquement. Le système vibre. Il possède une fréquence de vibration caractéristique, ou fréquence propre. Les sauts d'une configuration à une autre sont conditionnés par cette fréquence propre.

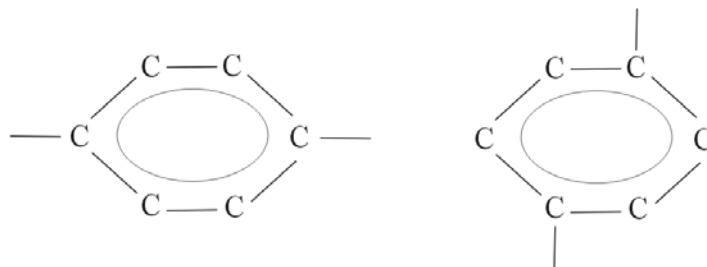
Lorsque l'on considère non plus deux groupements mais un polymère, chaque groupement interagit avec ses voisins et les mouvements sont donc collectifs. Il existe des modes de vibrations des macromolécules. On leur associe un temps caractéristique de changement de forme.

On peut alors considérer le polymère comme un assemblage de liaisons présentant chacune une ou plusieurs positions stables, une énergie associée et une fréquence caractéristique de leur mouvement. On peut distinguer trois types d'éléments :

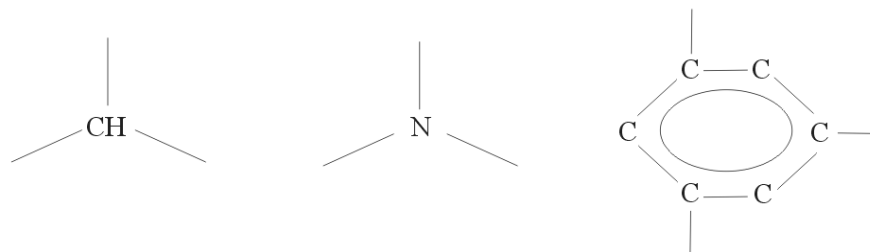
Les rotules, par exemple :



Les plaques rigides, par exemple :



Les liaisons tridimensionnelles, par exemple :



Les liaisons tridimensionnelles vont conduire à former un polymère ramifié, ce qui a des conséquences très importantes sur son comportement mécanique.

3.3.3 Echelle macromoléculaire

◇ Polymères thermoplastiques.

Ils sont constitués de macromolécules linéaires ou faiblement ramifiées. A la température ambiante les liaisons faibles entre macromolécules ne sont pas fondues. Lorsqu'on augmente la température, ces liaisons fondent ce qui permet la mise en forme ou le recyclage du matériau.

Selon la rigidité moléculaire, les mouvements des molécules sont plus ou moins faciles (§ 3.3.2). Plus les interactions entre groupements seront fortes, plus la structure du polymère tendra à s'organiser. On distingue ainsi trois structures pour les macromolécules à température ambiante. Les structures atactique, isotactique et syndiotactique.

Lorsque la structure est atactique (faible rigidité moléculaire) les groupements sont distribués aléatoirement de chaque coté de la molécule.

Lorsque la structure est isotactique, les groupements se trouvent tous du même coté de la chaîne. Compte tenu des interactions entre groupements à l'intérieur de la macromolécule, la structure isotactique peut alors prendre une forme hélicoïdale dans l'espace afin de minimiser les énergies d'interaction. Enfin, lorsque la structure est syndiotactique, les groupements alternent de part et d'autre de la chaîne, la molécule peut présenter une forme de zigzag dans un plan.

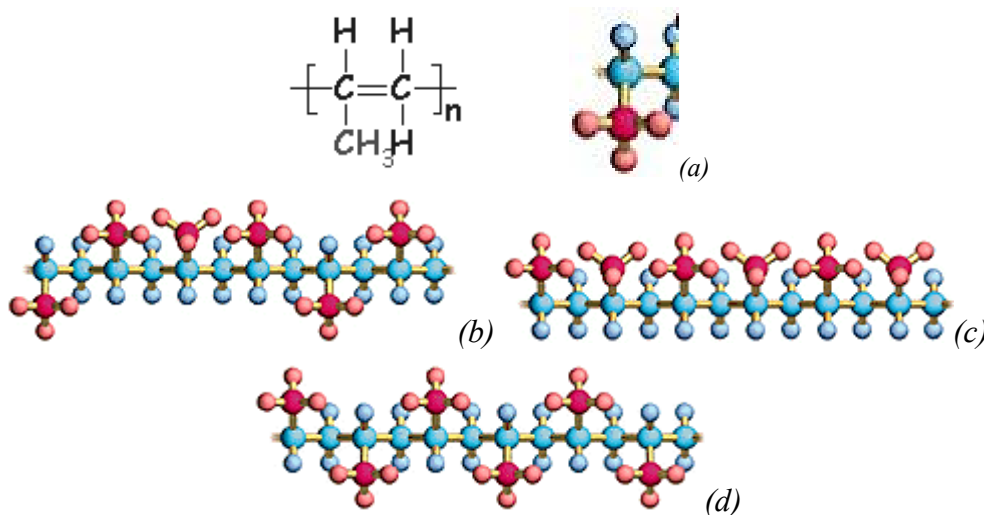


Figure 22 : Exemple du polypropylène (propène), $-(CHCH_3-CH_2)_n-$, (a) représentation du monomère, (b) structure atactique, (c) structure isotactique, (d) structure syndiotactique.

La forme adoptée par la macromolécule conditionne plus ou moins l'organisation des macromolécules à l'échelle supérieure. Par exemple, la distribution aléatoire des groupements des macromolécules de structure atactique s'oppose à leur cristallisation. Tandis que les macromolécules isotactique et syndiotactique, plus organisées, facilitent la cristallisation du polymère à l'échelle supérieure, même si cette cristallisation peut être assez complexe (Figure 23).

Les polymères syndiotactiques, sont en général caractérisés par une cristallisation rapide et susceptible d'atteindre des taux de cristallinité élevés, typiquement supérieurs à 80% (Exemples : PE $(-CH_2-CH_2-)_n$, PTFE $(-CF_2-CF_2-)_n$). Les polymères isotactiques (Exemples : PP $(-CH_2-CHCH_3-)_n$, PE $(-CH_2-CH_2-CO-NH-)_n$, cristallisent plus lentement que les précédents au cours d'un refroidissement et dépassent rarement un taux de cristallinité de 60%.

Les zones cristallisées peuvent prendre la forme de petites plaquettes (micelles), ou bien de rubans, ou encore de sphères (sphérolites).

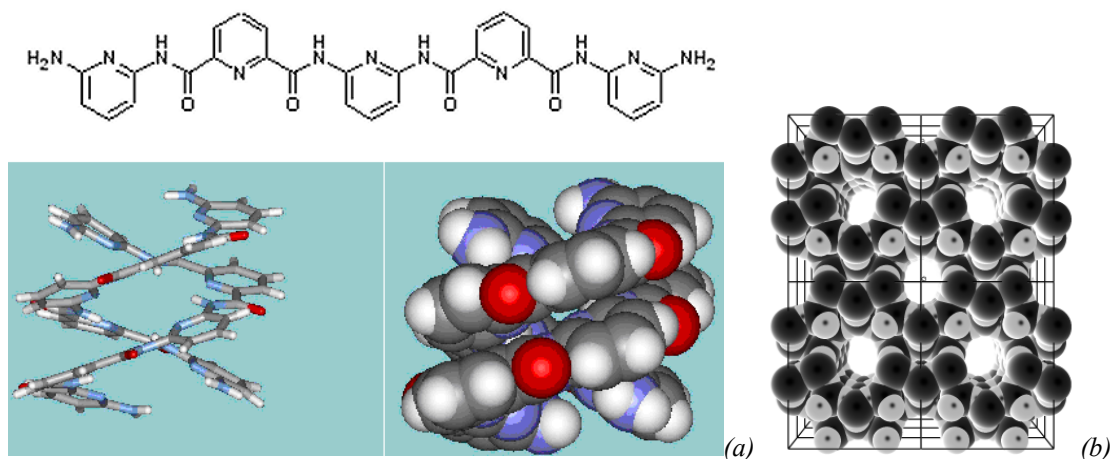


Figure 23 : (a) Exemple de structure isotactique s'enroulant en hélice, et même en double hélice dans l'espace. (V. Berl.,-M. Lehn, *Helical Molecular Programming. Supramolecular Double Helices by Dimerization of Helical Oligopyridine-dicarboxamide Strands*, *Chem. Eur. J* 2001, 7, 2810.) (b) Cristallisation, Galerie de photos de la société Accelrys.

◇ Polymères thermodurcissables.

Ces polymères sont constitués de réseaux à mailles serrées. On peut les fabriquer à base de polymères thermoplastiques. Sous l'effet de la chaleur ou en employant un catalyseur, ils forment de nombreuses liaisons covalentes entre chaînes, cette réaction est appelée la réticulation de la résine. Ils durcissent et deviennent alors très rigides. Les ponts entre chaînes ne pourront plus être « fondus » en augmentant la température, ces polymères ne sont pas recyclables.

Exemples, la résine époxy, résine polyuréthanes, résine urée formaldéhyde

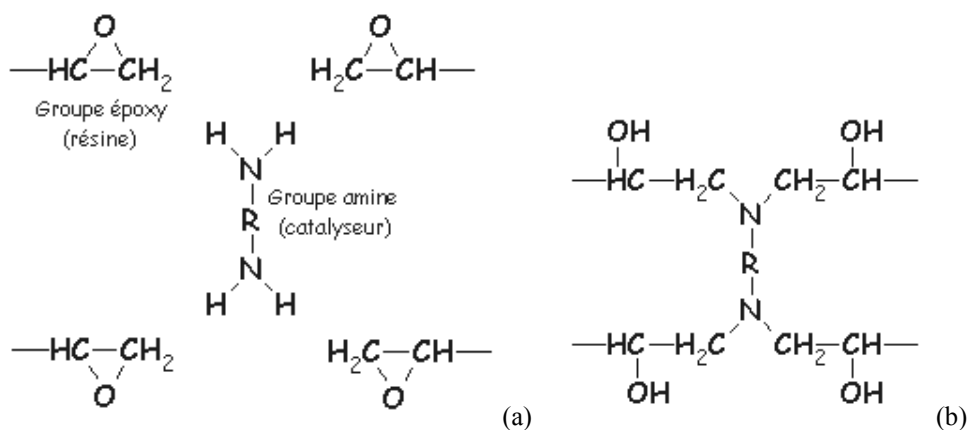


Figure 24 : formation d'une résine époxy réticulée à partir de polymère époxy et d'un catalyseur.

◇ Elastomères

Ces polymères sont constitués de réseaux à mailles larges, en outre à température ambiante les liaisons faibles sont fondues. Comme les polymères thermodurcissables, les ponts entre chaînes se forment sous l'effet de la chaleur ou en employant un catalyseur, mais ces ponts restent rares. Ces polymères ne sont pas recyclables.

Le caoutchouc naturel par exemple est un polymère linéaire de l'isoprène. A température ambiante, les liaisons faibles sont fondues, ce qui fait que le caoutchouc naturel est liquide. Il faut charger ce polymère en soufre puis lui appliquer un traitement thermo-chimique pour que se forment des ponts entre chaînes (pont S). Ce traitement s'appelle la vulcanisation. Alors le caoutchouc devient un élastomère c'est-à-dire un matériau capable de très grandes déformations viscoélastiques.

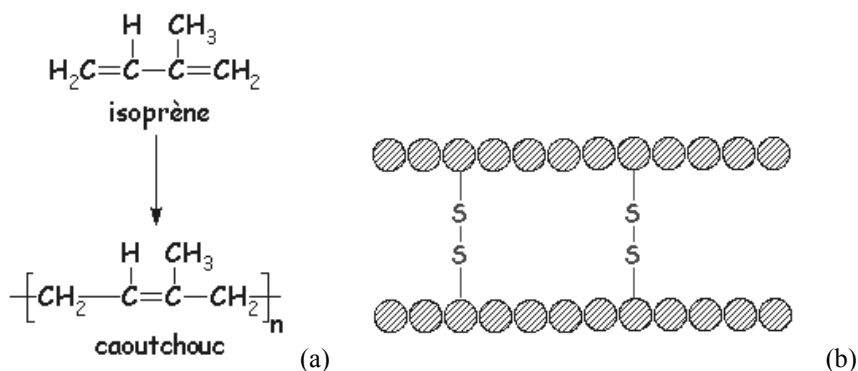


Figure 25 : (a) le caoutchouc naturel, un polymère de l'isoprène, (b) pont (S-S) entre chaînes assurant la cohésion de l'ensemble en l'absence de liaisons faibles, dans le caoutchouc vulcanisé.

3.3.4 Echelle morphologique

◇ Polymères amorphes ou verres de polymères

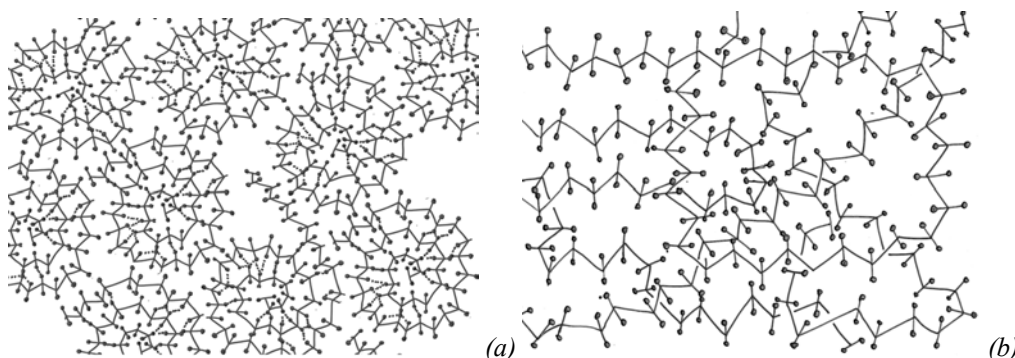


Figure 26 : illustration (a) polymère amorphe à structure particulaire, (b) polymère amorphe enchevêtré ou gélifié.

Comme on l'a dit plus haut (§ 2.3.2) les matériaux polymères peuvent présenter une structure amorphe ou cristallisée.

Lorsque la structure est amorphe deux types d'arrangements sont à distinguer, les polymères enchevêtrés (ou gélifiés) et les polymères à structure particulaire (ou « en pelotes »). En général plus la macromolécule est courte plus le polymère tend à adopter une structure particulaire, mais le processus de mise en forme peut briser cette structure particulaire et conduire à la formation d'une structure enchevêtrée.

Le comportement d'un matériau à structure particulaire s'approche de celui d'une pâte (grains solides dans un fluide) tandis que le polymère amorphe à structure enchevêtrée tend à présenter un comportement de gel (§ 2.1).

◇ Polymères cristallisés

Comme on l'a dit plus haut il est également possible de cristalliser un polymère, partiellement ou même complètement. Le processus peut être naturel, auquel cas les zones cristallisées restent petites (Figure 27 a) et d'orientations variables, ou bien induit par le procédé de mise en forme à l'état fondu (Figure 27 b) auquel cas la fraction volumique de zone cristallisée est plus grande et l'orientation des cristaux est liée au procédé.

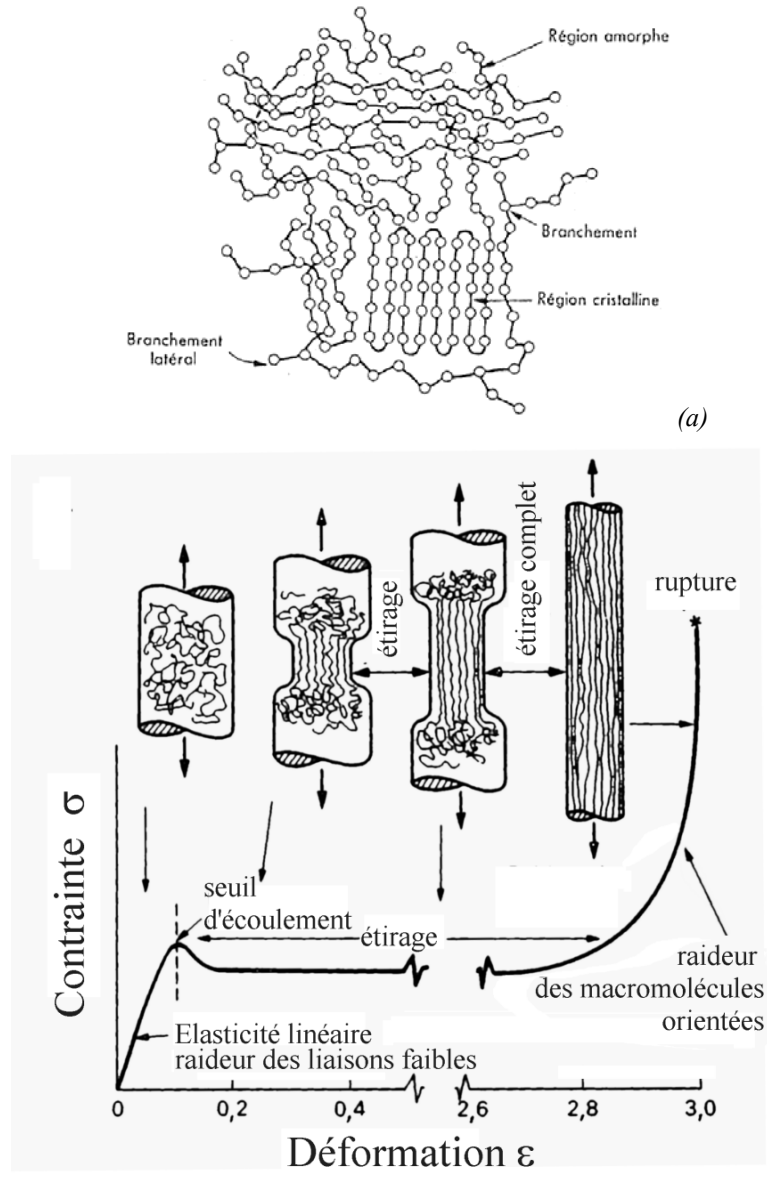


Figure 27 : Illustration (a) zones amorphes et cristallisées dans un polymère linéaire. (b) alignement des macromolécules par étirage (M.F. Ashby, D.R.H. Jones, Matériaux, Dunod).

Lors de l'étirage d'un polymère linéaire, les macromolécules s'alignent progressivement selon l'axe de la déformation. Le polymère cristallise sur de très grandes distances. Alors, ce sont les liaisons covalentes qui transmettent les efforts et non plus les liaisons faibles. Le module d'élasticité du matériau étiré et cristallisé est bien supérieur, si on le sollicite dans l'axe des macromolécules, à celui du matériau amorphe.

De nombreuses fibres organiques (fibres de carbone, de Kevlar) qui présentent de très hautes résistances mécaniques sont obtenues de cette manière. Pour la fibre de carbone par exemple, les macromolécules sont alignées par étirage, le polymère cristallise, puis des ponts (C-C) entre macromolécules sont créés afin de stabiliser la structure (graphitisation sous tension). Ainsi la fibre de carbone est elle constituée de plans de graphites enroulés autour de l'axe de la fibre.

La formation de cristaux sous tension n'est pas l'apanage des fibres, le même phénomène se produit dans les films plastiques.

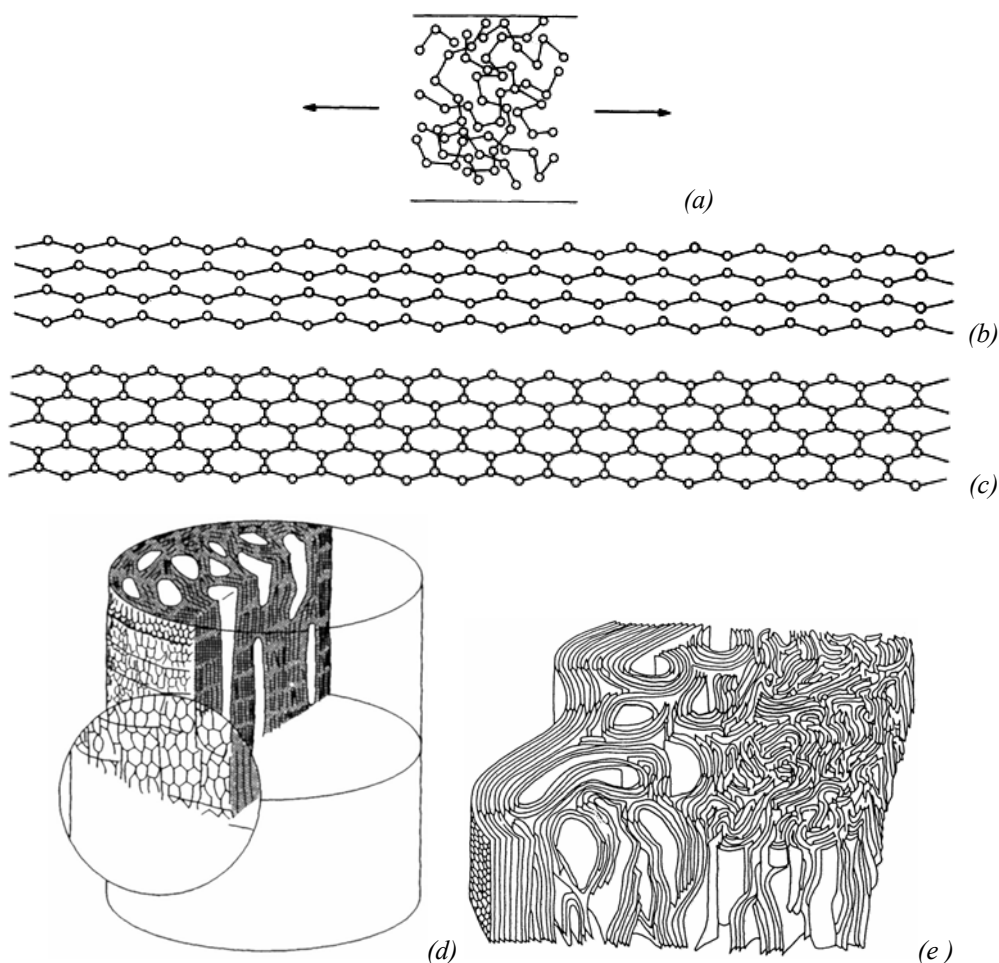
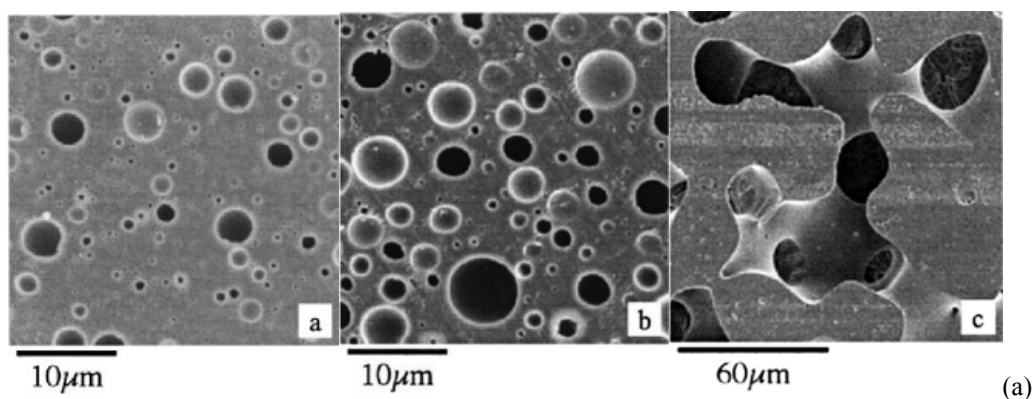


Figure 28 : Principe de fabrication d'une fibre de carbone par étirage d'une pelote de polymère linéaire. (a) Le polymère amorphe (PEET) est d'abord fondu, (b) puis étiré par passage à travers plusieurs filières successives, (c) enfin des ponts sont créés lors d'un premier traitement thermique à 300°C sous pression d'O₂ en filière puis un second à 1500°C sous azote. (d) Dans la fibre de carbone les plans de graphite sont enroulés autour de l'axe de la fibre.

◇ Mélanges de polymères

Enfin, lorsque deux polymères non-miscibles sont mélangés, on peut obtenir à l'échelle morphologique des structures de mélanges plus ou moins complexes, une simple émulsion, une structure co-continue ou encore des structures plus complexes obtenues lorsque le mélange de polymère se sépare dans un domaine très confiné (fabrication de films par exemple).



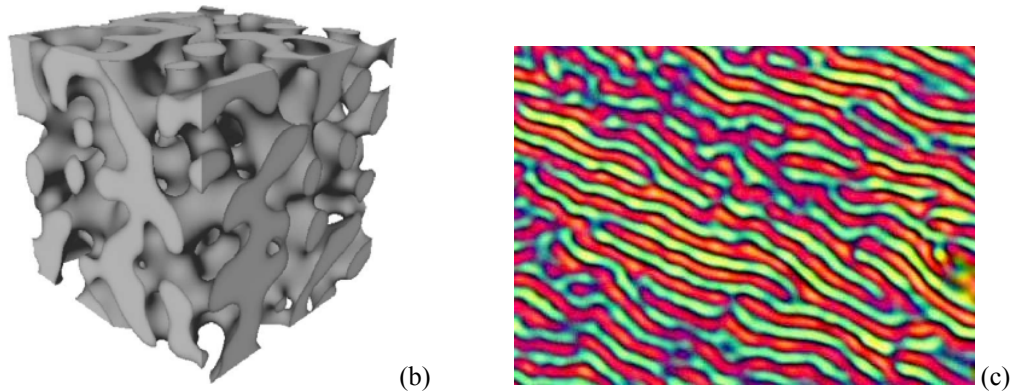


Figure 29 : (a) structure de mélanges de polymères (PEO/PS) 20/80, 35/65, 50/50 (J.A. Galloway , University of Minnesota) (b) modélisation d'une structure de mélange co-continue (Tsuyushi Koga), (c) autre type de structure de mélange obtenue dans un film constitué d'un mélange de polymère, cliché en lumière polarisée (Kari Danolki Veress)

3.4 Relations structure-propriétés

Le paragraphe précédent était un tour d'horizon rapide des différentes structures que peuvent présenter les matériaux polymères aux différentes échelles. La simple nomenclature du matériau ne suffit donc pas du tout à décrire la structure du matériau aux différentes échelles. Ainsi pour un polystyrène peut on avoir aussi besoin de savoir quelle est la longueur de la macromolécule, sa forme (iso, a ou syndio-tactique) , la fraction de polymère cristallisé, et dans les zones amorphes le type d'organisation etc

Cette description détaillée au différentes n'a cependant de sens que si les structures aux échelles intermédiaires ont un rôle important sur le comportement mécanique du matériau. Ce qui est l'objet de ce paragraphe. On se limitera à quelques points, mais il faut savoir qu'aujourd'hui on réalise des matériaux sur-mesure (« taylored materials ») pour lesquels la structure aux différentes échelles est conçue afin d'optimiser le matériau pour un critère donné, sa résistance mécanique (fibres de Kevlar par exemple), sa capacité d'amortissement (structures co-continues §3.6.3) etc...

3.4.1 Réticulation et propriétés thermo-élastiques de base (E , ρ , T_f , α)

Le polymère à l'état vitreux présente des liaisons covalentes, très fortes et des liaisons faibles entre macromolécules. Plus un polymère est réticulé plus la proportion de liaisons covalentes augmente (§ 3.3.3). Comme la densité, le module et la température de fusion augmentent lorsque l'énergie de la liaison augmente (§ 2.7) (le coefficient de dilatation thermique diminue), les mêmes tendances sont trouvées en fonction de la proportion de liaisons covalentes dans un polymère (Figure 30).

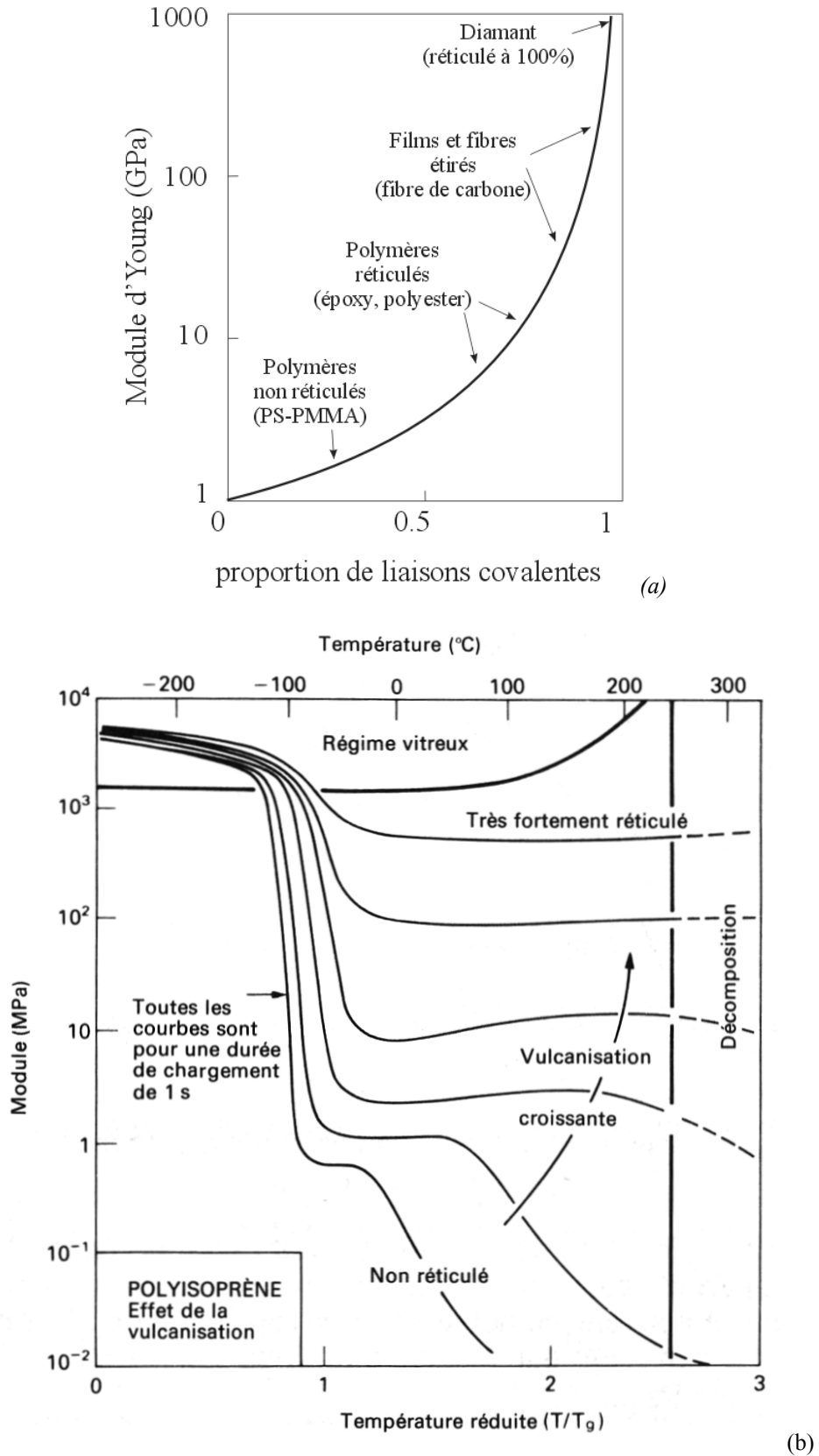


Figure 30 : (a) La variation du module d'élasticité d'un polymère avec la proportion de liaisons covalente dans l'axe de chargement, (b) Variation du module d'élasticité en fonction de la température et selon le niveau de réticulation d'un caoutchouc (polyisoprène) . (M.F. Ashby, D.R.H. Jones, Matériaux, Dunod).

3.4.2 Cristallisation et propriétés thermo-élastiques de base (E , ρ , T_f , α)

Avec un peu plus de détail, les liaisons faibles entre macromolécules peuvent être séparées en deux catégories, les liaisons faibles entre macromolécules à l'état amorphe et les liaisons faibles entre macromolécules cristallisées. Naturellement la liaison « faible » est un peu moins faible lorsque les macromolécules sont cristallisées que lorsqu'elles sont à l'état amorphe.

Ainsi lorsqu'on chauffe un polymère semi-cristallisé, et qu'on mesure par exemple sa masse volumique ρ (Figure 31 a), on observe une première transition lorsque les liaisons faibles dans les zones amorphes fondent (T_g). Le polymère est alors à l'état pâteux, des cristaux solides dans une matrice liquide. Une seconde transition est observée à plus haute température (T_f) lorsque les liaisons faibles dans les zones cristallisées fondent. Le polymère est alors complètement à l'état liquide. A haute température les macromolécules se déplacent librement. Si l'on refroidit, la température de cristallisation est inférieure à la température de fusion des zones cristallisées, car les macromolécules doivent d'abord s'organiser avant de cristalliser et la viscosité du polymère fondu s'y oppose.

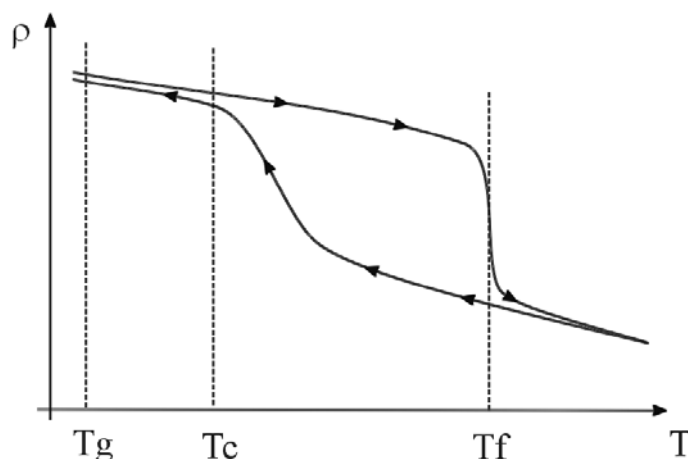


Figure 31 : Illustration, évolution de la masse volumique ρ en fonction de la température dans un polymère semi-cristallisé (J. Verdu)

En ce qui concerne l'élasticité, le polymère semi-cristallisé peut être considéré comme un « composite ». Ainsi peut on dire en première approximation que le module d'élasticité du polymère semi-cristallin se calcule comme suit, en fonction de f la fraction volumique de zone cristallisée, E_c le module d'élasticité du polymère (hypothétique) cristallisé à 100% et E_m le module de la matrice amorphe :

$$E = fE_c + (1 - f)E_m$$

3.4.3 Elasticité caoutchoutique

◇ Mécanisme

Les élastomères sont des polymères dont les liaisons faibles entre macromolécules sont fondues à température ambiante. Cependant il existe entre les chaînes des liaisons fortes, mais peu nombreuses. Le matériau peut être vu comme un réseau à mailles larges.

Ces matériaux sont capables de supporter des déformations considérables sans rupture, puis lorsqu'on les décharge de revenir macroscopiquement dans leur configuration initiale, d'où le terme d'élasticité caoutchoutique. Compte tenu de leur grande déformations le cadre hpp ne convient plus on travaille en grandes transformations.

On emploie généralement les élastomères dans l'industrie mécanique pour réaliser des systèmes amortissants, des joints Par ailleurs ces matériaux sont extrêmement importants dans le monde du vivant (animal ou végétal). Les mécaniciens travaillant en bio-mécanique sont journellement confrontés à des matériaux présentant une élasticité caoutchoutique marquée (tendons, tissus élastiques ...)

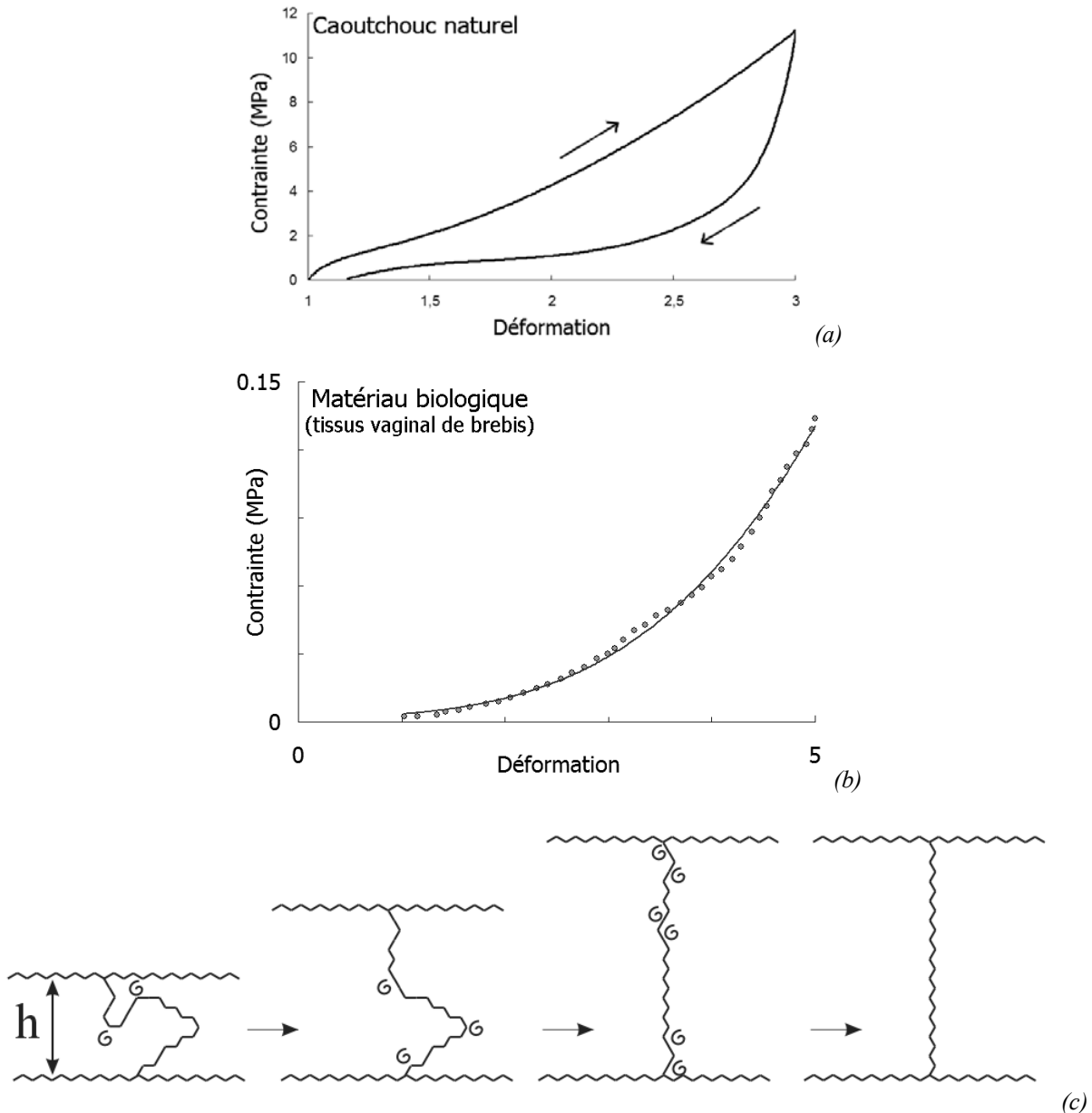


Figure 32 : (a) essai sur un caoutchouc naturel renforcé par des particules de silice (L. Gentot). Le matériau est capable d'endurer des déformations très importantes et lorsqu'il est déchargé il ne présente pas ou peu de déformation irréversible (d'où le terme abusif d'élasticité), (b) essai de traction sur un matériau biologique (tissu vaginal de brebis), le tissu présente un comportement caoutchoutique marqué et peut atteindre des déformations de 500%. (c) mécanisme de déformation à l'échelle macromoléculaire, de gauche à droite, on passe de la première à la seconde configuration avec seulement deux rotations, et de la deuxième à la troisième avec trois rotations, une fois la macromolécule alignées dans l'axe de chargement, les changements de configurations ne jouent plus sur sa longueur.

Schématiquement, la déformation provient de réarrangements des macromolécules. Ce ne sont pas les liaisons faibles entre macromolécules qui sont impliquées ici mais les liaisons faibles entre groupements dans une même macromolécule. Au repos, une macromolécule pourra adopter une forme qui minimise ces interactions, puis lorsqu'on charge le matériau, la macromolécule peut se déformer (§ 3.3.2) (par rotation successive de groupement). Lorsqu'on décharge, elle est libre de revenir progressivement dans une configuration d'énergie minimale.

Les mouvements à l'échelle moléculaire (§ 3.3.2) sont conditionnés par deux points : pour sauter d'une configuration à l'autre il faut franchir un col d'énergie, et ces sauts se produisent à une fréquence donnée. A l'échelle de la macromolécule, plus les transformations élémentaires à effectuer sur une macromolécule pour passer d'une longueur l à une longueur $l+dl$ sont nombreuses et plus le col d'énergie sera grand. Si la macromolécule est fortement repliée, il existe pour une distance bout en bout h de très

nombreuses configurations distinctes possibles pour cette macromolécule, et un faible nombre de rotations (donc une faible contrainte) permet de grandes variations de h (Figure 32). En revanche, lorsque la macromolécule est bien orientée, les changements de configurations sont minimes et en tout cas ne jouent plus sur sa longueur.

◇ Elasticité entropique

Ainsi la relation entre contrainte et déformation est elle liée au nombre de configurations distinctes que peut prendre une macromolécule pour chaque niveau de déformation. On introduit donc la notion d'**élasticité entropique**. On verra plus loin comment calculer cette entropie.

On rappelle que :

$$U = \Psi + TS$$

Où U est l'énergie interne, Ψ l'énergie libre, T la température et S l'entropie (fonction du nombre de configurations du système pour chaque état de déformation). On suppose que l'essai est isotherme :

Lors d'un essai mécanique on aura alors :

$$\frac{dU}{dt} = P_{ext} + Q = \frac{d\Psi}{dt} + T \frac{dS}{dt} \quad \text{soit} \quad T \frac{dS}{dt} = P_{ext} + Q - \frac{d\Psi}{dt}$$

$$\text{Si la transformation est réversible, alors : } T \frac{dS}{dt} = Q \quad \text{Soit : } P_{ext} = \frac{d\Psi}{dt}$$

En introduisant des grandeurs relatives à un volume de matière, la contrainte, la vitesse de déformation élastique, ψ l'énergie libre spécifique et en tenant compte de la conservation de la masse, il vient :

$$\sigma : \frac{d\varepsilon_e}{dt} = \rho \frac{d\psi}{dt} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} : \frac{d\varepsilon_e}{dt} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial T} : \underbrace{\frac{dT}{dt}}_{=0} \Rightarrow \sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e}$$

En introduisant maintenant l'énergie interne spécifique e , et l'entropie spécifique s , il vient :

$$\psi = e - Ts \Rightarrow \sigma = \rho \left. \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_e} \right|_T - \rho T \left. \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_e} \right|_T$$

En fait les deux écritures sont équivalentes, la seconde permet simplement de mettre en évidence le terme d'origine entropique. Dans le cas des élastomères, le terme entropique est largement dominant.

$$\sigma \approx -\rho T \left. \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_e} \right|_T$$

Lorsque la déformation augmente, les macromolécules s'ordonnent, l'entropie diminue, la contrainte augmente, cet effet est à l'origine de l'allure de la courbe Figure 32a.

Ce raisonnement permet d'écrire des lois de comportement pour les élastomères. La démarche est la même que celle qui permet d'établir les constantes d'élasticité (§ 2.4.2) à partir d'une énergie libre. On suppose que l'entropie est maximale à déformation nulle. Si le matériau est isotrope l'entropie est alors une fonction des invariants de la déformation. Avec ces quelques hypothèses on définit le nombre minimum de coefficients à caractériser et les essais à réaliser.

Pour la plupart des matériaux, le terme entropique est tout à fait négligeable, sauf justement dans les élastomères et les milieux enchevêtrés (panneaux de fibres de verre par exemple).

◇ Quelques éléments sur l'entropie

On rappelle la formule de Boltzmann qui lie l'entropie d'un système au nombre Ω de configurations équivalentes (ici au sens de la déformation) qu'il peut prendre. :

$$S = kLn\Omega$$

Où k est la constante de Boltzmann $k = 1.38066 \cdot 10^{-23}$ J/K. Au repos l'entropie est maximale (probabilité la plus élevée).

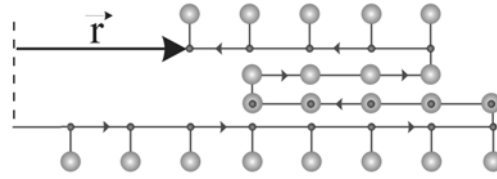


Figure 33 : Exemple de configuration d'une macromolécule. La distance (r) entre les deux extrémités attachées à d'autres macromolécules est ici de $2a+1$. Le nombre total de groupements est $n=18$, avec $n^+=10$ et $n^-=8$.

Pour faciliter les calculs, on se donne un exemple très simple (mais très peu vraisemblable !). Supposons qu'un polymère linéaire soit constitué de n groupements tous identiques, de longueur a . S'il y a rotation entre deux groupements, la rotation est égale à plus ou moins π dans le plan. Si la molécule est attachée à un segment de longueur fixe x_0 , la longueur totale pourra donc varier de x_0-an à $x_0+a.n$, lorsque la chaîne se plie et se déplie. Le vecteur r qui joint les deux extrémités de la chaîne pourra s'écrire, en fonction du nombre n de groupements et de la longueur a d'un groupement :

$$\vec{r} = \sum_{i=0}^n \vec{r}_i = a(n^+ - n^-) \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad n = n^+ + n^-$$

Le nombre Ω de configurations de n^+ objets parmi n est donné par la formule de Moivre.

$$\Omega = C(n, n^+) = \frac{n!}{n^+!(n - n^+)!}$$

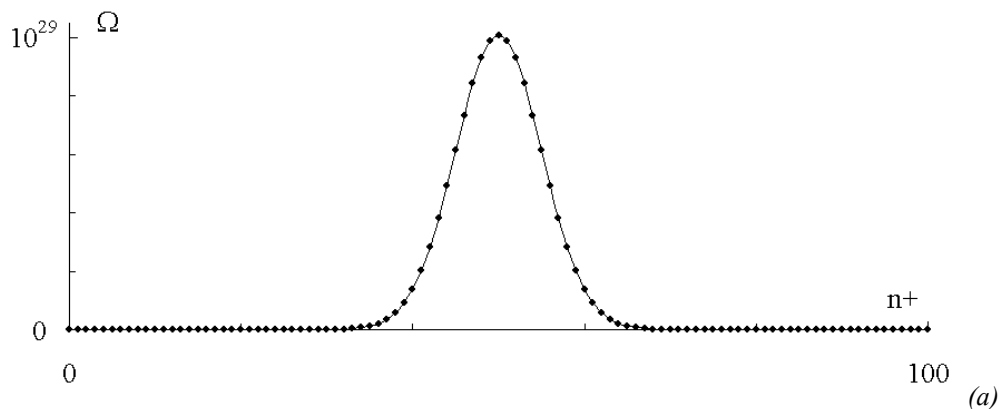
Le nombre Ω de configurations de n^+ objets parmi n est maximum si $n^+=n/2$. La configuration de la chaîne la plus vraisemblable, donne sa longueur au repos soit $r=0$. La longueur totale au repos sera donc égale à x_0 .

La déformation ϵ se calcule en fonction de r de la façon suivante : $\epsilon=(r-x_0)/x_0$

On peut donc associer un nombre de configurations et donc une entropie spécifique s à chaque niveau de déformation ϵ , où m est la masse molaire d'un groupement, n le nombre de groupements et N le nombre d'Avogadro ($N=6.02213 \cdot 10^{23}$) :

$$s = \frac{k}{n(m/N)} Ln \frac{n!}{n^+!(n - n^+)!} \quad \text{et} \quad \sigma \approx -\rho T \left. \frac{\partial s}{\partial \epsilon_e} \right|_T$$

On retrouve l'allure de la courbe de la Figure 32a, plus l'entropie diminue et plus la contrainte augmente. Il faut fournir beaucoup d'efforts pour mettre de l'ordre !



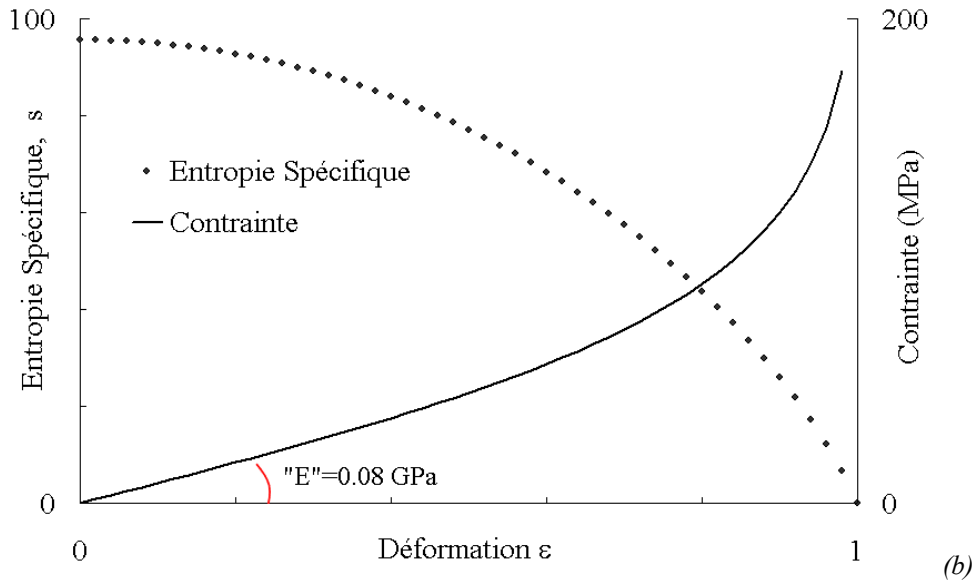


Figure 34 : Exemple de calcul de module d'élasticité caoutchoutique. On se donne le nombre de groupements $n=100$, la masse molaire d'un groupement $m=60\text{g/mol}$. La masse volumique $\rho=2000\text{kg/m}^3$. La température $T=20^\circ\text{C}=293.15\text{K}$. (a) calcul du nombre de configurations pour chaque valeur de n^+ . (b) calcul de l'entropie et de la contrainte. Pour calculer la déformation on se donne $x_0=100a$.

3.4.4 Polymères amorphes et viscosité

Nous allons étudier ici les relations qui existent entre les mécanismes élémentaires de déformation irréversibles et la viscosité à l'échelle macroscopique. On se limitera aux polymères thermoplastiques à matrice amorphe pour lesquels la capacité de déformation irréversible est la plus grande. Les zones cristallisées d'un polymère thermoplastique se déforment beaucoup plus difficilement de manière irréversible, on pourra souvent les considérer comme élastiques.

◇ Polymères amorphes à structure particulière

On va ici assimiler le polymère thermoplastique à structure particulière à un milieu granulaire. Il s'agit de déterminer qualitativement la relation entre la viscosité et la structure du polymère.

Comme précédemment, pour faciliter les calculs, on se donne un exemple simple. Supposons qu'un polymère linéaire soit constitué de groupements tous identiques, s'il y a rotation entre deux groupements, la rotation est toujours égale à $+\pi/2$.

Alors le vecteur r qui joint les deux extrémités de la chaîne pourra s'écrire, en fonction des trois directions de l'espace et du nombre n de groupements et de la longueur a d'un groupement :

$$\vec{r} = \sum_{i=0}^n \vec{r}_i = a(n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3) \quad \text{avec} \quad n = n_1 + n_2 + n_3$$

On en déduit la distance bout en bout d'une chaîne linéaire :

$$r^2 = a^2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \Rightarrow \left(\frac{r}{r_{\max}}\right)^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{(n_1 + n_2 + n_3)^2}$$

Où sa longueur maximale lorsqu'elle est étirée vaut $r_{\max}=a.n$

Il est assez facile de montrer que cette distance est minimale si $n_1=n_2=n_3$, et vaut alors $r = \frac{na}{\sqrt{3}}$

Les mêmes calculs peuvent être effectués avec des angles de valence différents de $\pi/2$, ou bien en utilisant la distance bout en bout de probabilité maximale plutôt que de longueur minimale. Le résultat est toujours proportionnel au nombre n de groupements dans le polymère.

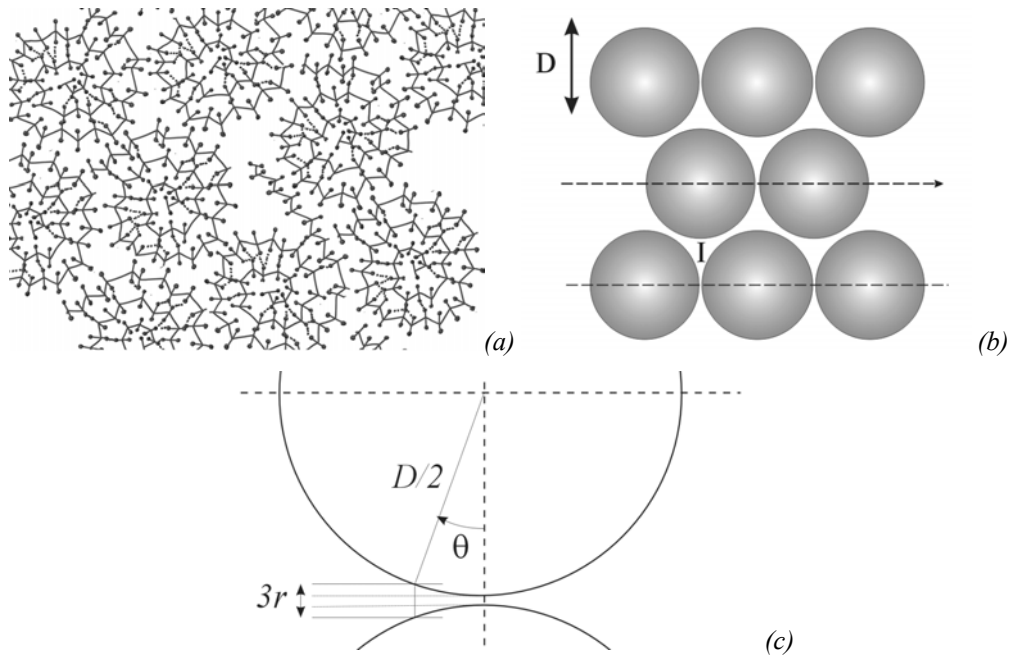


Figure 35 : représentation d'un polymère amorphe à structure particulaire comme une pâte, ou milieu granulaire. (a) les macromolécules sont repliées sur elles mêmes. (b) on suppose qu'on peut les représenter comme des sphères de diamètre D . (c) Distance d'interaction entre sphères.

On assimile ainsi un polymère (-groupement-) $_n$ à un milieu granulaire constitué de sphères de diamètre D , D étant proportionnel à n .

La déformation irréversible s'effectue par glissement relatif des lits de billes. Macroscopiquement on voit se former des bandes de cisaillement localisées dans le polymère. Ce mécanisme explique pourquoi la déformation visqueuse se produit sans changements de volume significatifs.

Par ailleurs, on observe également que la viscosité η du polymère est proportionnelle à la longueur de la macromolécule n .

Un petit calcul (Figure 35 (c)) permet de justifier ce résultat. Plus le rayon de courbure des sphères est grand et plus le nombre de groupements qui interagissent entre deux sphères est grand. La distance entre groupements est supposée égale à a , la distance minimale entre sphère est supposée égale à r , on suppose également que les groupements n'interagissent plus si leur distance est supérieure à $3r$. Cela correspond à un angle $\cos(\theta) = 1 - \theta^2/2 = (D-2r)/D$. Le nombre de groupements qui interagissent est proportionnel à la surface $(D\theta/a)^2$. Dont on déduit que les forces d'interactions entre sphères sont donc proportionnelles à leur diamètre.

Ainsi, lorsque le polymère linéaire amorphe présente une structure particulaire, on justifie que la viscosité η est proportionnelle à la longueur de la macromolécule n .

◇ Polymères amorphes enchevêtrés.

Lorsque les macromolécules sont enchevêtrées le polymère peut présenter une combinaison de deux types de comportement.

A grande vitesse de sollicitation, les enchevêtrements entre les macromolécules sont assimilables à des « nœuds » et peuvent être considérés comme des liaisons fortes. Par exemple sur la Figure 36, le brin de polymère entre les enchevêtrements B et C pourra se déplier si l'on tire sur le polymère, tandis que les enchevêtrements en B et en C s'écartent l'un de l'autre lorsqu'on déforme de polymère. Le comportement du matériau se rapprochera alors de celui d'un élastomère.

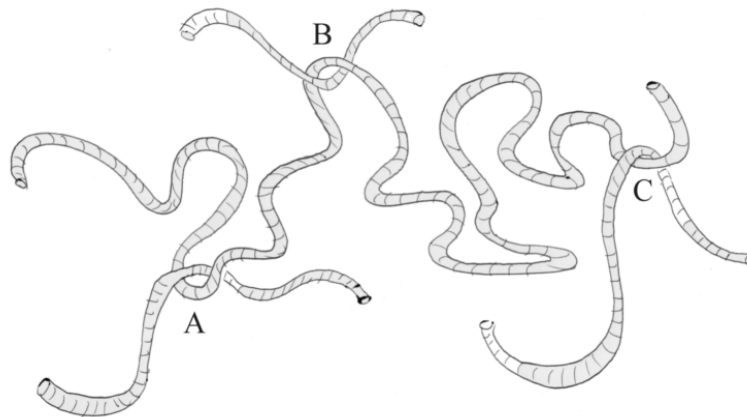


Figure 36 : Illustration, polymère linéaire amorphe enchevêtré.

A faible vitesse de sollicitation, les macromolécules peuvent glisser les unes par rapport aux autres (Figure 38) à travers les enchevêtrements et le matériau est alors capable de présenter des déformations irréversibles. Pour cela il faut laisser à la macromolécule le temps de changer de conformation afin de franchir les enchevêtrements.

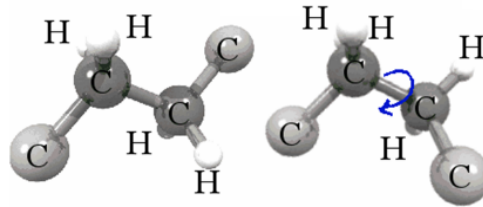


Figure 37 : Rotation relative de deux groupements CH_2 .

Comme on l'a dit plus haut (§ 3.3.2) la macromolécule est constituée de groupements, qui interagissent entre eux à l'échelle moléculaire. Ces groupements peuvent avoir des mouvements relatifs (de rotation) qui permettent à la macromolécule de changer de conformation (Figure 37). On peut en première approximation assimiler ainsi la liaison entre deux groupements à une liaison rotule avec un ressort de torsion (Figure 21). Lorsqu'on fournit de l'énergie au système, il vibre autour de la position d'équilibre avec une fréquence ν associée au système vibratoire (moment d'inertie en rotation des groupements, « ressort » de torsion associé à leur liaison). On écrira :

$$\nu = \nu_o \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$$

Où U est l'énergie interne du système, T la température, ν_o la fréquence de vibration fondamentale et ν la fréquence de vibration du système à la température T .

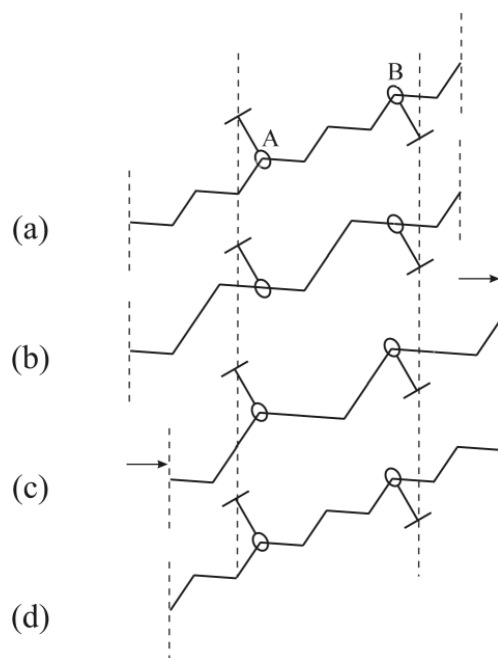


Figure 38 : Illustration du mouvement relatif d'une macromolécule entre deux enchevêtrements. (a) conformation et position initiale. (b) la macromolécule change de conformation, (c) ceci lui permet de glisser à travers les deux enchevêtrements (A et B), (d) elle change de nouveau de conformation.

Il est assez simple de montrer que si la fréquence propre de vibration d'un système de deux masselottes identiques en rotation liées par un ressort de torsion est donnée et égale à ν , alors, lorsqu'on combine N masselottes du même type, le nombre de modes propres est égal à N et la fréquence propre la plus petite évolue comme $1/N$, tandis que la plus grande est quasiment constante proche de 2ν . Des calculs pointus de dynamique moléculaire permettent de définir précisément les changements de conformation et les fréquences propres associées pour une macromolécule

Ainsi pour une macromolécule la fréquence caractéristique ν_g de changement de conformation permettant le glissement à travers deux enchevêtrements distants de N groupements, pourra s'exprimer comme suit :

$$\nu_g = \frac{\nu}{N} = \frac{\nu_o}{N} \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$$

Si on note a la longueur d'un groupement, la vitesse de déformation vaut alors :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \propto \frac{a}{L} \nu_g \propto \frac{\nu_o}{N^2} \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$$

Le paramètre dominant n'est donc plus la longueur de la macromolécule mais la distance entre enchevêtrements L .

◇ Régimes de viscosité.

Lorsque les polymères linéaires amorphes sont formés de macromolécules courtes, ils présentent une structure plutôt particulière, lorsque leur longueur augmente, ils tendent à présenter une structure plutôt enchevêtrée. Il a ainsi pu être montré que pour un polymère donné, il existe deux régimes de viscosité en fonction de la masse moléculaire :

Lorsque la masse moléculaire est faible : $\eta \propto M$

Lorsque la masse moléculaire est grande : $\eta \propto M^{3.4}$

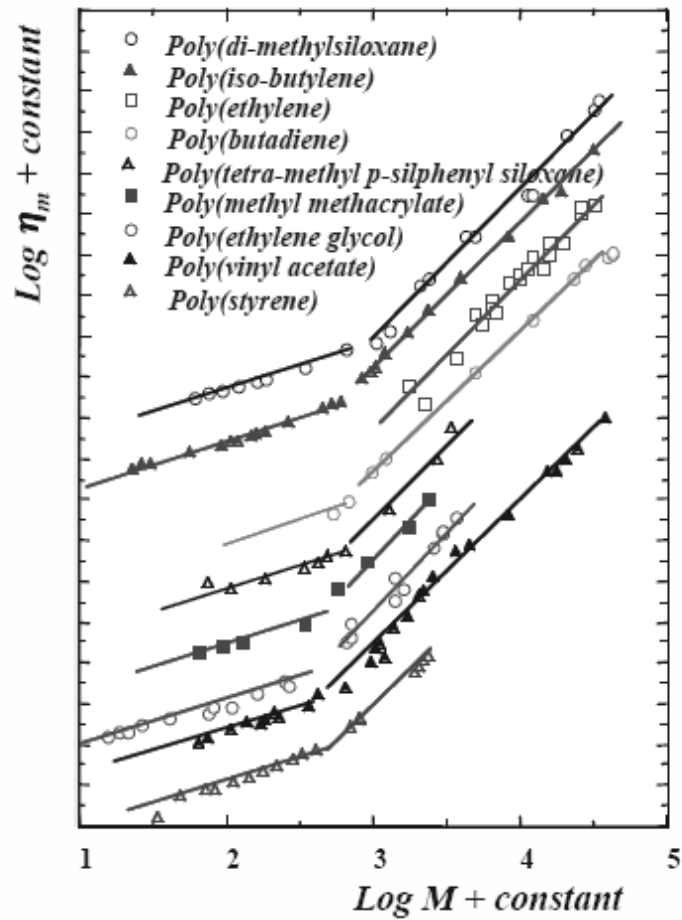


Figure 39 : D'après Berry et Fox. La viscosité η dans une gamme de vitesse donnée est tracée en fonction de la masse moléculaire M de plusieurs polymères linéaires. Deux régimes de viscosité apparaissent, à gauche η est proportionnel à M à droite η est proportionnel à $M^{3.4}$.

3.5 Résumé

Polymères

Les matériaux polymères sont constitués de macromolécules organiques (C, O, H, N etc...) entre lesquelles existent des liaisons faibles et éventuellement des pontages par des liaisons fortes.

- Thermoplastiques : pas de liaisons covalentes entre macromolécules, mais liaisons faibles.
- Thermodurcissables : réseau serré de liaisons covalentes et liaisons faibles entre macromolécules.
- Elastomères : réseau lâche de liaisons covalentes entre macromolécules, liaisons faibles fondues à température ambiante.

Les matériaux polymères peuvent présenter des déformations élastiques, des dilatations thermiques et des déformations irréversibles visqueuses.

- Thermoplastiques : élasticité + viscosité.
- Thermodurcissables : élasticité.
- Elastomères : élasticité caoutchoutique.

Viscosité

- La viscosité η est la pente instantanée de la courbe-contrainte vitesse de déformation irréversible de cisaillement γ , établie lors d'un essai à vitesse de cisaillement imposée

$$\eta(\gamma) = \left. \frac{d\tau}{d\gamma} \right|_{\gamma}$$

- La déformation visqueuse se produit sans changement significatif de volume.

Relation de comportement (cas uniaxial), modèle rhéologiques :



- Contrainte σ , déformation visqueuse ϵ_v , η viscosité : $\sigma = \eta \frac{d\epsilon_v}{dt}$

- Comportement newtonien : viscosité constante $\eta = \eta_0$

- Comportement non newtonien : viscosité variable $\eta = K \left| \frac{d\epsilon_v}{dt} \right|^{m-1}$

- K est appelé l'indice de consistance du matériau et m son indice de pseudo-plasticité

Relation de comportement (cas général) :

- Tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$, tenseur des vitesses de déformation \underline{D}
- Si le matériau est isotrope, une déformation équivalente D_{eq} peut être définie à partir des invariants de \underline{D} : $D_{eq} = \sqrt{2Tr(\underline{D}^2)}$

- Relation de comportement : $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{\eta}}\underline{\underline{D}}$ où $p = -\frac{Tr\underline{\underline{\sigma}}}{3}$ et $Tr\underline{\underline{D}} = 0$


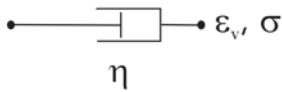
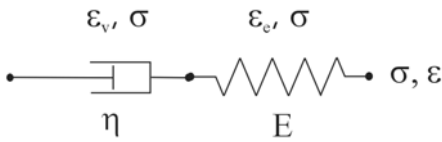
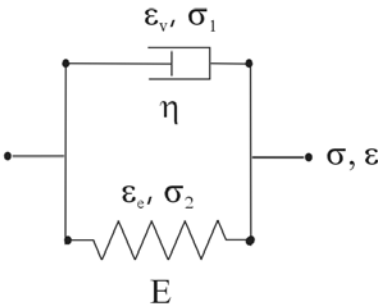
- Expression de la viscosité, cas non-newtonien : $\eta = KD_{eq}^{m-1}$

3.6 Problèmes

3.6.1 Essais mécaniques et comportement visco-élastique

Les matériaux visco-élastiques, comme leur nom l'indique, font intervenir deux types de comportement : l'élasticité et la viscosité. On se propose d'étudier les réponses lors d'essais de fluage, de relaxation et de spectrométrie mécanique de deux comportements visco-élastiques « classiques », le modèle de Maxwell et le modèle de Kelvin-Voigt.

L'objectif est de montrer que le choix d'un essai mécanique particulier pour caractériser une propriété mécanique (comme la viscosité) suppose une connaissance du matériau. A défaut, on ne peut se contenter d'un seul essai.

Modèle rhéologique	Symbole	Réponse 1D
Elasticité		$\sigma = E \varepsilon_e$
Viscosité		$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon_v}{dt}$
Maxwell (assemblage série)		
Kelvin-Voigt (assemblage parallèle)		

- **Question 1, Modèles rhéologiques** : Ecrire pour les deux modèles les équations reliant la vitesse de déformation et la contrainte. On note $t_c = \eta/E$.
- **Question 2, Essai de Fluage** : Etudier et comparer la réponse des deux modèles à une sollicitation de fluage-recouvrance (on applique une contrainte $\sigma = \sigma_0$ à l'instant t_0 , cette contrainte est maintenue pendant une durée Δt puis on applique $\sigma = 0$ à $t = t_0 + \Delta t$, l'évolution de ε est suivie pendant l'essai). Discutez les résultats. Dans quel cas apparaît-il une déformation irréversible ? En quoi t_c peut-il être qualifié de temps caractéristique ?
- **Question 3, Essai de Relaxation** : Etudier et comparer la réponse des deux modèles à une sollicitation de relaxation. (on applique une déformation $\varepsilon = \varepsilon_0$ à l'instant t_0 , cette déformation est maintenue pendant une durée Δt , l'évolution de σ est suivie pendant l'essai)
- **Question 4 : Spectrométrie mécanique** : Etudier et comparer la réponse des deux modèles à une sollicitation harmonique (on impose une sollicitation cyclique $\sigma = \sigma_0 \cdot \sin \omega t$, et on la puissance moyenne

délivrée au système en fonction de la fréquence de sollicitation). On attendra la stabilisation du système ($t \gg t_c$) et on considère dans tous les cas que la fréquence de l'essai est très petite devant $1/t_c$. Montrer qu'on peut écrire la déformation comme une solution harmonique déphasée par rapport à la contrainte imposée, en déduire l'expression de la densité de puissance moyenne délivrée en fonction de ce déphasage et discuter.

Indication :

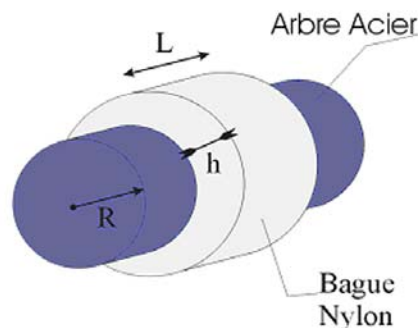
$$\sin a \cdot \sin b - \cos a \cdot \cos b = -\cos(a + b)$$

$$\sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin(a - b)$$

3.6.2 Application, tenue en service d'une butée en Nylon Technyl.

Objectifs : Application du modèle rhéologique de Maxwell au calcul de l'évolution de la contrainte et de la déformation dans une structure. Sensibilisation à l'existence de contraintes internes héritées de l'assemblage ou des opérations de fabrication.

On se propose d'étudier la relaxation d'une butée en Nylon Technyl. Comme l'indique le schéma suivant. Elle est composée d'une bague, frettée sur un arbre d'acier que l'on suppose indéformable. Le rayon R est grand devant l'épaisseur de la butée h . Le rayon de l'arbre est R , le rayon libre de la bague avant son montage est $R-s$ ou s est le serrage de la bague. s est supposé très petit devant R .



- **Question 1, Comportement visqueux du Nylon :** Le modèle rhéologique retenu pour décrire le comportement viscoélastique du Nylon est celui de Maxwell (ressort E et amortisseur η en série) On note $t_c = \eta/E$. Ecrire les équations différentielles caractéristiques de ce modèle, et sa réponse lors d'un essai de relaxation.
- **Question 2, Montage de la butée :** On suppose qu'après frettage la bague en nylon n'est soumise qu'à une contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ due à l'action de l'arbre sur la bague. On supposera que la pression p exercée par l'arbre sur la bague est uniforme, on négligera toute autre source de contraintes dans le système.
 - Donner la relation entre p et la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ régnant dans la bague de Nylon.
 - Donner la déformation circonférentielle $\epsilon_{\theta\theta}$ supposée uniforme de la bague en fonction du serrage s .
 - Lors du montage, quasi-instantané, quelle hypothèse peut-on faire sur le comportement du Nylon ? Donner la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ dans la bague après frettage, lorsque son rayon passe de $R-s$ à R .
- **Question 3 : Durée de vie de la butée**
 - Calculez l'évolution de $\sigma_{\theta\theta}$ au cours du temps.
 - On suppose un coefficient de frottement de Coulomb f entre l'arbre et la bague. Si la butée subit un effort axial T , à partir de quel instant t_f la bague ne pourra t'elle plus jouer son rôle de butée ?
 - Si maintenant la durée d'utilisation est imposée par le cahier des charges, calculez l'expression du serrage s en fonction de la durée d'utilisation de la butée imposée t_f et de l'effort imposé T .

3.6.3 Mélanges de polymères : Synthèse d'un matériau à fort coefficient d'amortissement

La valorisation des matières plastiques recyclées a donné lieu à de nombreuses études scientifiques sur les mélanges de polymères. Aujourd'hui par exemple des traverses de chemin de fer sont réalisées aux Etats-Unis à partir de mélanges de polymères recyclés. La composition est ajustée afin d'obtenir un matériau présentant d'excellentes propriétés d'absorption des vibrations, comparables à celles d'un élastomère de qualité moyenne, mais à un prix beaucoup plus faible.

Certains polymères sont non miscibles. Le mélange de tels polymères est structuré selon la fraction volumique de chacun des polymères. Lorsque deux polymères A et B non miscibles sont mélangés, trois structures différentes peuvent être observées, une émulsion de A dans B, une structure co-continue et enfin une émulsion de B dans A.

Quiconque a déjà réalisé une mayonnaise sait que la structure d'un mélange influe considérablement sur ses propriétés mécaniques, ce que nous essaierons de mettre en évidence à l'aide de modèles très simplifiés du matériau selon sa microstructure.

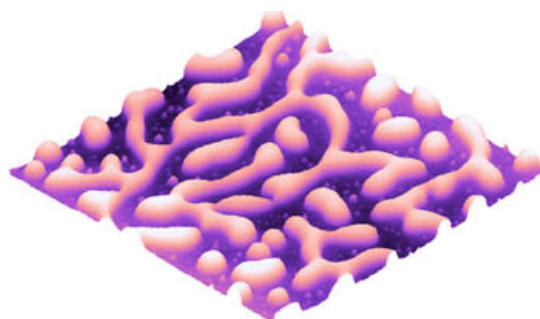
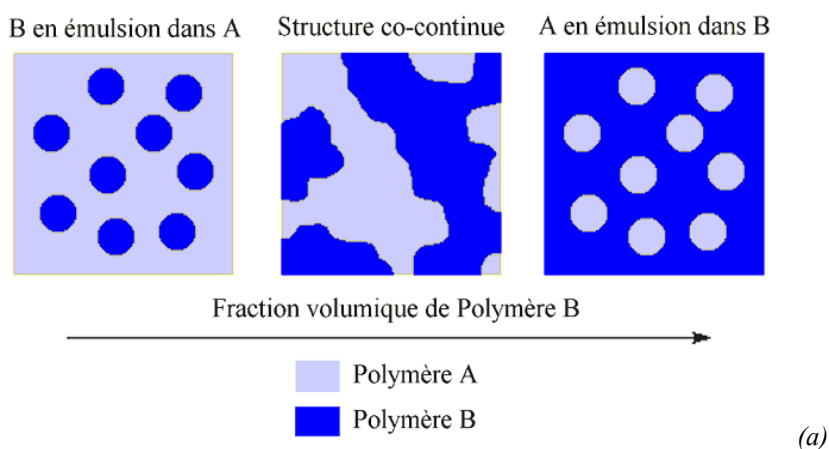


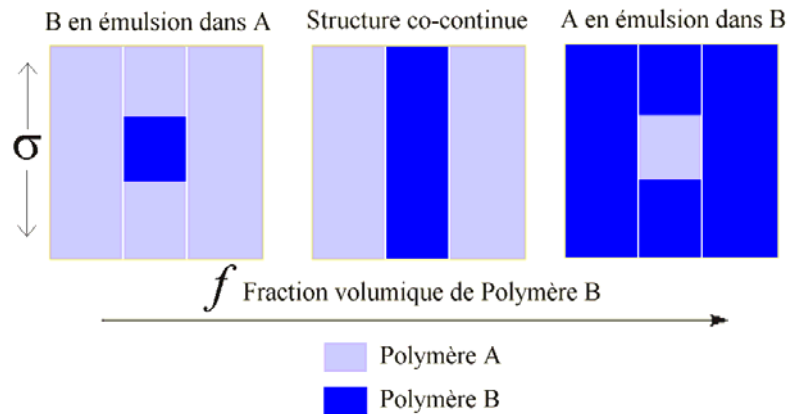
Figure 40 : (a) vue générale des structures susceptibles de se former dans un mélange de polymères non-miscibles. (b) Image AFM, de la surface d'un mélange de poly(styrène) et poly(méthyl méthacrylate). La structure de la surface résulte d'une décomposition spinodale. Image de $3\mu\text{m}$ par $3\mu\text{m}$, d'après C. Ton-That, Robert Gordon University, U.K.

L'objectif de ce problème est d'étudier plus particulièrement l'effet de la composition (fraction volumique de B dans A) et de la structure d'un polymère sur sa capacité d'amortissement des vibrations ou des chocs. On déterminera donc les temps caractéristiques associés au processus d'amortissement dans le matériau l'objectif étant de comprendre la relation structure-propriété et pas d'obtenir des résultats quantitatifs, nous nous appuierons sur des modèles très simplifiés de la microstructure des différents mélanges, (modèles rhéologiques 1D), et tenterons d'en tirer les tendances principales.

◇ Modèles rhéologiques

On se donne trois représentations très simplifiées de chacune des trois structures et des comportements des deux polymères. Le polymère B est supposé présenter un comportement purement visqueux avec une viscosité η (par ex. polymère amorphe à structure particulaire), tandis que le

polymère A est en première approximation purement élastique avec un module d'élasticité E (par ex. polymère amorphe fortement cristallisé).



- **Question 1 :** Proposer un modèle rhéologique pour chacune des trois microstructures.
- **Question 2 :** Pour quelle microstructure peut-on voir apparaître des déformations permanentes lors d'un essai de fluage recouvrance (on applique une contrainte pendant un temps Δt puis on ramène la contrainte à zéro). Cette microstructure permet-elle de réaliser un amortisseur ? On se limitera par la suite à étudier les comportements des deux microstructures qui ne se déforment pas de manière irréversible.
- **Question 3 :** Calculez les différentes fractions volumiques apparaissant dans les modèles rhéologiques des deux microstructures qui ne se déforment pas de manière irréversible en fonction de la fraction volumique f de polymère B dans le mélange (A+B).
- **Question 4 :** Pour les deux modèles rhéologiques des microstructures qui ne se déforment pas de manière irréversible, écrire les équations reliant contrainte et déformation.

◇ Etude de l'amortissement

On cherche à étudier les capacités d'amortissement du matériau. Pour cela, on détermine d'abord les temps caractéristiques d'amortissement des deux modèles rhéologiques. On suppose qu'on libère le matériau depuis une déformation initiale ε_0 à $t=0$ et on détermine le temps caractéristique d'amortissement du matériau, ceci revient à chercher la solution générale de l'équation différentielle établie plus haut.

En second lieu, on suppose qu'on impose une oscillation forcée, $\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t)$, en régime établi, on souhaite que le matériau dissipe un maximum d'énergie.

- **Question 1 :** Déterminez pour chaque modèle rhéologique la solution générale des équations de comportement établies plus haut. En déduire les temps caractéristiques de chaque microstructure.
- **Question 2 :** Tracer l'allure de l'évolution du temps caractéristique t_{cX} en fonction de la fraction volumique f , pour les deux modèles. On normalisera le temps caractéristique par $t_c = \eta/E$. On tracera la réponse entre $f=0.1$ et $f=0.5$. A ce stade vous pouvez conclure sur la question de savoir quelle est la microstructure la plus propre à permettre la réalisation d'un composant amortisseur. Sinon, la question suivante permet de s'en convaincre.
- **Question 3 :** On suppose maintenant que l'on applique une sollicitation cyclique de pulsation ω , $\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t)$. Calculez la puissance moyenne dissipée dans chacune des deux microstructures. On suppose qu'on travaille en régime établi. Normaliser la puissance moyenne par $P_o = \frac{\sigma_o^2}{2 E t_c}$ et comparer les résultats pour les deux microstructures à même fraction volumique f (pour $t_c=1$ sec et $f=0.3$ par exemple).

4 COMPORTEMENT PLASTIQUE, EXEMPLE DES MATERIAUX METALLIQUES

4.1 Introduction

Un comportement est dit plastique lorsque d'une part le matériau est capable de présenter des déformations irréversibles et que d'autre part la contrainte d'écoulement plastique ne dépend pas de la vitesse de déformation.

Les matériaux métalliques présentent généralement un comportement plastique pour des températures inférieures à la moitié de leur température de fusion (en K). En outre ils présentent presque systématiquement aussi un domaine d'élasticité. Au-delà de $T_f/2$ la contrainte d'écoulement devient significativement dépendante de la vitesse de déformation et le domaine d'élasticité négligeable, le comportement est alors qualifié de visco-plastique.

Cette capacité à présenter des déformations plastiques est extrêmement intéressante car elle permet la mise en forme ou l'assemblage de pièces par déformation plastique. D'autre part, cela contribue à la résistance à la rupture.

Dans un premier temps, nous définirons le comportement élasto-plastique en général. Comment le caractériser, quelles sont les propriétés conventionnelles que l'on définit pour un matériau élastoplastique et comment modéliser le comportement élastoplastique en 1D à l'aide de modèles rhéologiques.

Dans un second temps, nous étudierons les relations entre la structure des matériaux métalliques et leurs propriétés. Nous verrons que comme les matières plastiques, les matériaux métalliques doivent être décrits à différentes échelles, qui contribuent de manière différente au comportement d'ensemble.

4.2 Le comportement élastoplastique

4.2.1 Méthode de caractérisation

Les essais de traction-compression uniaxiaux sont à la fois les plus simples et les plus couramment utilisés pour mettre en évidence les caractéristiques du comportement élasto-plastique mécanique d'un matériau métallique. On soumet une éprouvette de longueur initiale L_0 et de section initiale S_0 , à un effort croissant F lors d'un essai de traction et à un effort cyclique lors d'un essai de traction-compression.

On mesure l'allongement de l'éprouvette à l'aide d'un extensomètre, et éventuellement la variation de section à l'aide d'un capteur diamétral (Figure 41 a).

On calcule alors la contrainte et la déformation conventionnelles :

$$\sigma = \frac{F(t)}{S_0} \quad \varepsilon = \frac{L(t) - L_0}{L_0}$$

Si l'on dispose d'un capteur diamétral, on peut éventuellement calculer la contrainte et la déformation rationnelle :

$$\sigma = \frac{F(t)}{S(t)} \quad \varepsilon = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L(t)}{L_0}$$

Cette distinction est usuelle. Cependant, en pratique tant que la déformation n'excède pas 0.2 les deux mesures de déformation ont moins de 10% d'écart (Figure 41 b).

4.2.2 Analyse d'un essai de traction

On peut alors tracer l'évolution de la contrainte appliquée en fonction de la déformation.

Pour de très petites déformations, la courbe contrainte-déformation est linéaire, avec une pente E , où E est le module d'Young. Si l'on décharge l'éprouvette, sa déformation revient à zéro, le comportement est élastique. Puis la courbe tend à devenir non-linéaire, et lorsqu'on décharge l'éprouvette, il reste une déformation permanente, le comportement est élasto-plastique.

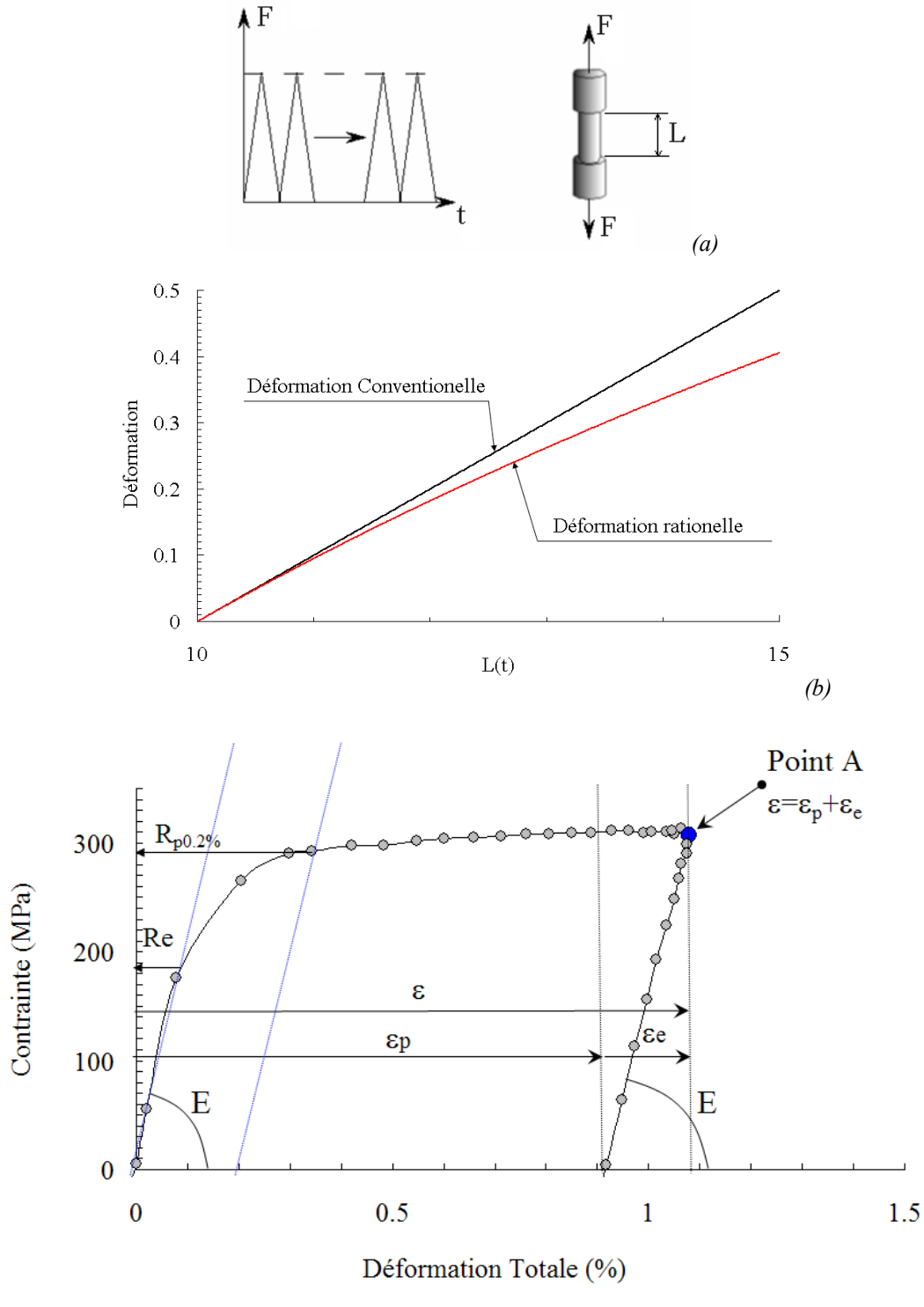


Figure 41 : (a) sollicitation appliquée sur une éprouvette de traction compression. (b) comparaisons des deux mesures de déformation classiques, déformation rationnelle et conventionnelle. (c) Analyse d'un essai de Traction simple sur un acier inoxydable 316L. Illustration de l'hypothèse de partition.

◇ Hypothèse de partition

On observe généralement que lorsque les déformations restent petites ($\varepsilon < 0.2$) on peut faire l'hypothèse de partition des déformations.

En effet à tout instant, si l'on décharge l'éprouvette, on observe que la pente de la courbe contrainte déformation est de nouveau linéaire avec une pente E. Le comportement est élastique lors de la décharge. Mais à $\sigma=0$, il reste une déformation plastique ou permanente notée ε_p . Si l'on recharge à partir de ce point, de nouveau le comportement du matériau est élastique, linéaire avec un module E puis devient non-linéaire.

Ainsi, la déformation totale ε est la somme d'une déformation élastique ε_e et d'une déformation plastique ε_p .

$$\text{Soit : } \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\varepsilon}_p \quad \text{avec à tout instant} \quad \underline{\sigma} = \underline{E}\underline{\varepsilon}_e$$

Où $\underline{\sigma} = \underline{E}\underline{\varepsilon}_e$ est l'opérateur d'élasticité (en traction simple on aura simplement $\sigma=E\varepsilon_e$, où E est le module d'élasticité §2.4.2.)

◇ Limite d'élasticité conventionnelle

On définit la limite d'élasticité « vraie » du matériau comme la contrainte à partir de laquelle le comportement cesse d'être purement élastique lors de la première mise en charge du matériau. Sur la Figure 41c, cette limite d'élasticité R_e se trouve aux alentours de 170 MPa. Mais l'on voit bien que selon le critère de non-linéarité que l'on se donne on pourra trouver différentes valeurs pour cette limite d'élasticité vraie.

On définit donc une limite d'élasticité conventionnelle, $R_{p0.2\%}$ comme la contrainte à partir de laquelle la déformation plastique excède 0.2% lors de la première mise en charge du matériau. On peut de même se définir une limite d'élasticité $R_{p0.02\%}$, comme la contrainte à partir de laquelle la déformation plastique du matériau excède 0.02%.

◇ Contrainte maximale

Au-delà de la limite d'élasticité le matériau présente généralement de l'écrouissage. La contrainte à appliquer pour obtenir un écoulement plastique augmente lorsque la déformation augmente. Elle sature en général à une valeur appelée contrainte maximale et notée R_m (Figure 42).

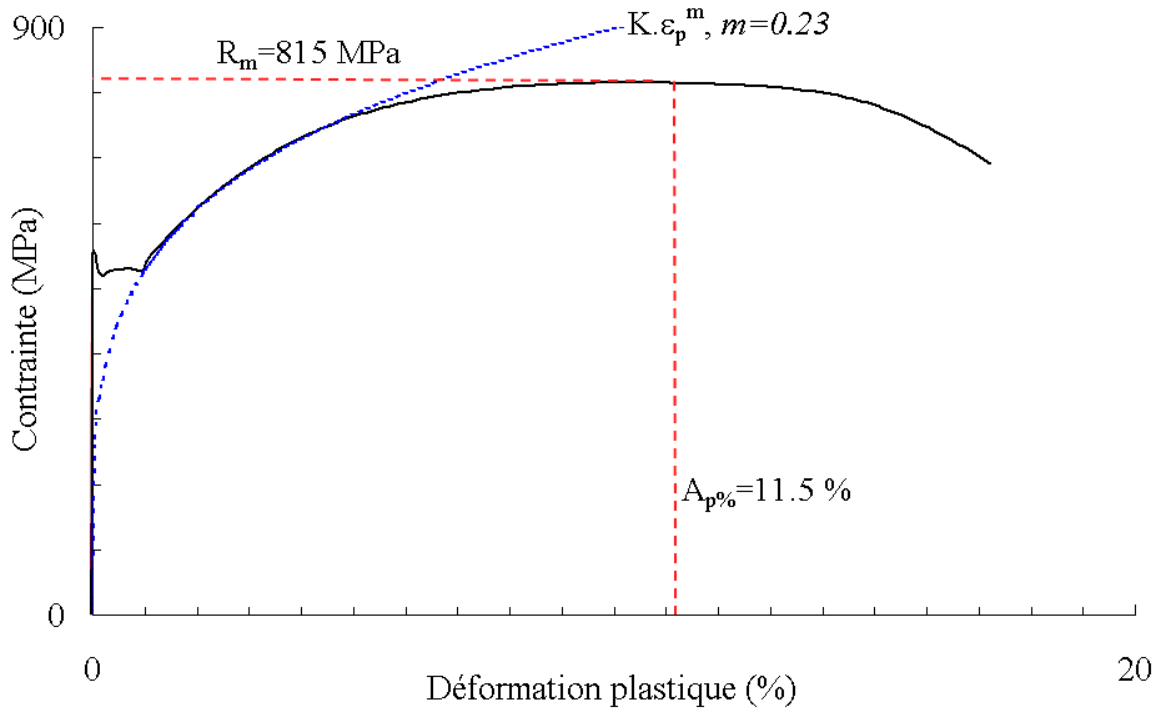


Figure 42 : résultat d'un essai de traction simple sur un acier doux à 0.48% de carbone (Rami Hamam). La courbe en traits pleins est le résultat d'essai, la courbe en pointillé l'ajustement par une fonction $s=K\epsilon_p^m$. On définit aussi, la contrainte maximale R_m , l'allongement réparti $A_p\%$.

◇ Taux d'écrouissage

Dans certains cas, on peut avoir besoin de définir le taux d'écrouissage du matériau. C'est une donnée importante, par exemple pour sélectionner un matériau pour réaliser une mise en forme par déformation plastique.

Le taux d'écrouissage, noté H , est la pente de la courbe contrainte-déformation plastique :

$$H(\epsilon_p) = \left. \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} \right|_{\epsilon_p}$$

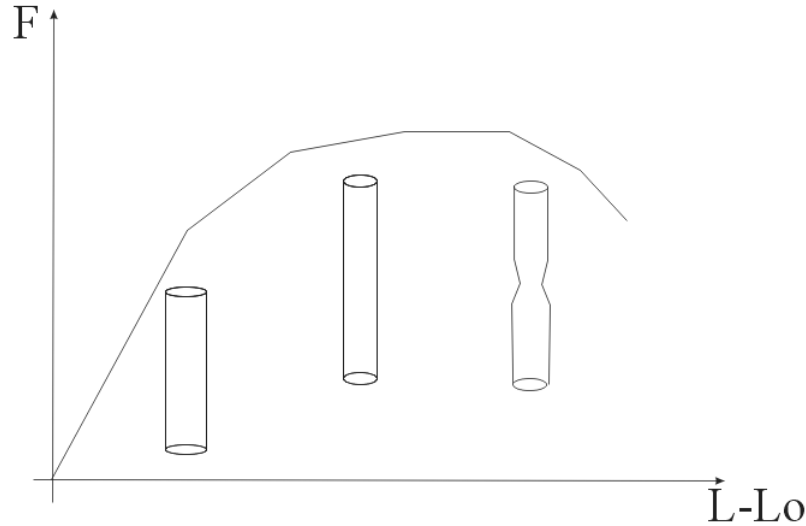
En toute rigueur ce taux d'écrouissage varie avec la déformation plastique. Ainsi on ne dispose pas d'une donnée unique pour caractériser le taux d'écrouissage d'un matériau mais d'une courbe. Ce n'est pas toujours pratique lorsqu'on veut faire une sélection de matériau. On emploie alors le coefficient de Lankford, qui est l'exposant m de la courbe $\sigma = K\epsilon_p^m$ qui s'ajuste le mieux sur la phase d'écrouissage du matériau.

◇ Allongement plastique réparti $A_p\%$ et striction

Lors d'un essai de traction, on observe que la déformation reste homogène tant que la contrainte reste inférieure à R_m . Au-delà la déformation plastique se localise, on assiste au phénomène de striction.

On définit donc l'allongement plastique réparti, noté $A_p\%$ qui est la déformation plastique au delà de laquelle la déformation plastique devient hétérogène.

Au-delà de cette déformation, selon le type d'éprouvette, éprouvette plate, éprouvette cylindrique ou autre, on obtient des résultats différents. L'allongement plastique à la rupture n'est donc pas caractéristique du matériau seulement mais aussi de l'éprouvette. Tandis que l'allongement plastique réparti $A_p\%$ est réellement une donnée du matériau.



Lors d'un essai de traction compression, avant la striction : $\frac{dF}{F} \geq 0$, à la striction $\frac{dF}{F} = 0$.

$$\text{Or } F = \sigma \cdot S \Rightarrow \frac{dF}{F} = \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{dS}{S} \geq 0$$

L'évolution de l'effort de traction est lié d'une part à l'évolution de la contrainte d'écoulement du matériau (écrouissage) et d'autre part à la variation de section de l'éprouvette (localisation).

Comme la déformation plastique se fait sans changement de volume on peut écrire :

$$V = L \cdot S \Rightarrow \frac{dV}{V} = 0 = \frac{dS}{S} + \frac{dL}{L} = \frac{dS}{S} + d\varepsilon$$

En rassemblant les deux équations il vient alors :

$$\frac{dF}{F} = \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{dS}{S} \geq 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{\sigma} - d\varepsilon \geq 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \geq \sigma$$

C'est-à-dire qu'on obtient un critère de striction fondé sur la capacité d'écrouissage du matériau ($d\sigma/d\varepsilon$).

En pratique il est bien connu que la capacité d'écrouissage du matériau contrôle la localisation de la déformation. En effet, si une zone se déforme plastiquement davantage que son environnement et s'il reste au matériau une certaine capacité d'écrouissage, la contrainte d'écoulement locale devient alors plus élevée qu'ailleurs, ce qui tend à limiter par la suite la déformation plastique dans cette zone et donc à homogénéiser la déformation. En revanche, si le matériau ne présente plus d'écrouissage rien ne s'oppose à la localisation de la déformation.

Ainsi, à la fois, $A_p\%$ et le coefficient d'écrouissage sont des paramètres importants pour choisir un matériau pour réaliser une mise en forme par déformation plastique. Nous allons raffiner ci-dessous la notion d'écrouissage.

4.2.3 Analyse d'un essai de traction-compression

Au-delà de la limite d'élasticité et avant d'atteindre sa contrainte maximale le matériau présente de l'écrouissage, à savoir une augmentation de sa contrainte d'écoulement. Cet écrouissage se compose de deux termes : un terme d'écrouissage isotrope et un terme d'écrouissage cinématique.

Cette distinction peut se faire lorsqu'on réalise des essais de traction compression. On impose alors une déformation totale cyclique sur une éprouvette, et on mesure l'évolution de la contrainte au cours du temps. Comme précédemment on calcule :

$$\sigma(t) = \frac{F(t)}{S_0}, \quad \varepsilon(t) = \frac{L(t) - L_0}{L_0}, \quad \text{et} \quad \varepsilon_p(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E}$$

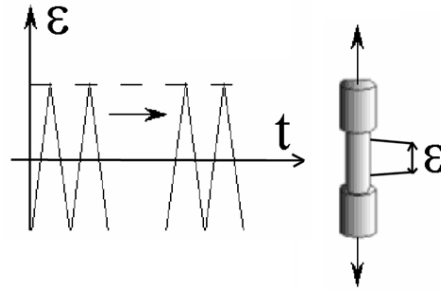


Figure 43 : Essai à déformation imposée.

Si l'on trace la contrainte en fonction de la déformation plastique, on obtient des boucles d'hystérésis. A titre d'illustration, des boucles d'hystérésis mesurées sur un acier inoxydable 316L à température ambiante sont tracées sur les deux figures ci-dessous.

◇ Ecrouissage cinématique

Lorsque la déformation plastique n'évolue pas (la courbe est alors verticale) le matériau est dans son domaine d'élasticité.

La limite d'élasticité initiale R_e se trouve ici aux alentours de 170 MPa.

Le sens de la déformation est inversé pour une déformation plastique $\varepsilon_p = 0.9\%$.

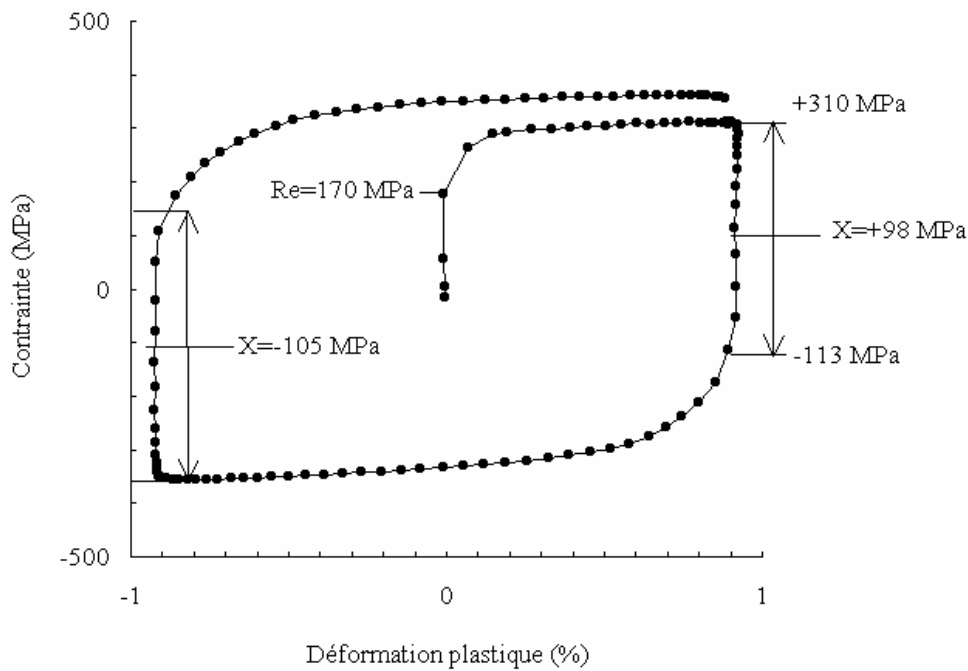


Figure 44 : Acier inoxydable 316L. Boucles d'hystérésis N°1, mesurée à température ambiante et à une vitesse de déformation imposée de $0.001s^{-1}$.

Lors de la décharge, le matériau reste d'abord dans son domaine d'élasticité. Puis, pour une contrainte de -113 MPa : une déformation plastique en retour se produit.

Les nouvelles limites du domaine d'élasticité sont alors de 310 MPa en traction et de -113 MPa en compression.

Le domaine d'élasticité du matériau s'est donc fortement décalé vers les contraintes positives, le centre du domaine d'élasticité se situant vers $+100$ MPa pour $\varepsilon_p = 0.9\%$. Cet effet dit « effet Bauschinger », ou « écouissage cinématique » est couramment observé dans les matériaux métalliques. On peut

constater que le domaine d'élasticité est décalé vers les contraintes positives après la première traction, puis vers les contraintes négatives après la déformation plastique en compression.

La position du centre du domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes, notée X , dépend de l'histoire de la déformation plastique du matériau.

◇ *Ecrouissage isotrope*

D'autre part, ces essais permettent aussi de suivre l'évolution de l'étendue du domaine d'élasticité. Dans l'état initial, le domaine d'élasticité de cet alliage a une étendue de $(2.Re)$ soit 340 MPa.

Après déformation plastique on observe que la dimension de ce domaine d'élasticité évolue, il vaut 420 MPa pour une déformation plastique de 0.9% et 550 MPa au même point mais après vingt boucles de traction-compression. L'effet des déformations plastiques successives se cumule et l'étendue du domaine d'élasticité augmente régulièrement avec la déformation plastique cumulée. Ce phénomène est appelé écrouissage « effectif » du matériau. L'effet inverse ou « adoucissement » est aussi couramment observé. La « contrainte effective » est définie comme la moitié de l'étendue du domaine d'élasticité.

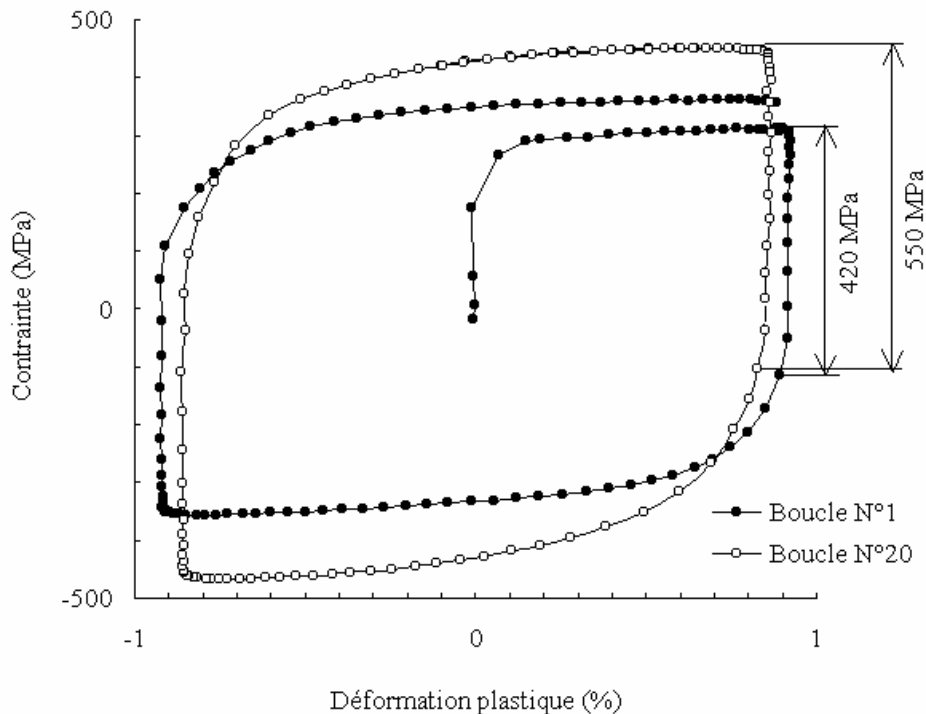


Figure 45 : Acier inoxydable 316L. Boucles d'hystérésis N°1 et N°20, mesurée à température ambiante et à une vitesse de déformation imposée de $0.001s^{-1}$. Première boucle : cercles pleins, vingtième boucle : cercles vides

4.2.4 Modèles rhéologiques

◇ *Comportement élasto-plastique*

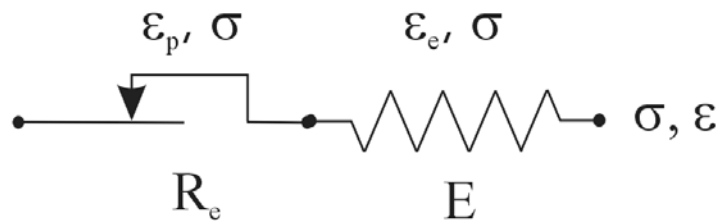
Si le matériau ne possède pas de domaine d'élasticité alors le comportement du matériau pourra être assimilé à un comportement visqueux pseudo-plastique (§ 3.2.3).

En règle générale pour les matériaux métalliques, le comportement sera élasto-plastique.

On a vu que lorsque les déformations plastiques restent inférieures à 0.2 on pouvait faire l'hypothèse de partition des déformations à savoir que la déformation est la somme d'une déformation plastique et d'une déformation élastique.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad \text{avec} \quad \sigma = E\varepsilon_e$$

Le symbole suivant est employé pour représenter un comportement élastoplastique,



On aura pour la partie plastique :

$$Si \quad -R_e < \sigma < +R_e \Rightarrow \frac{d\varepsilon_p}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad Si \quad \frac{d\varepsilon_p}{dt} \neq 0 \Rightarrow \sigma = \pm R_e$$

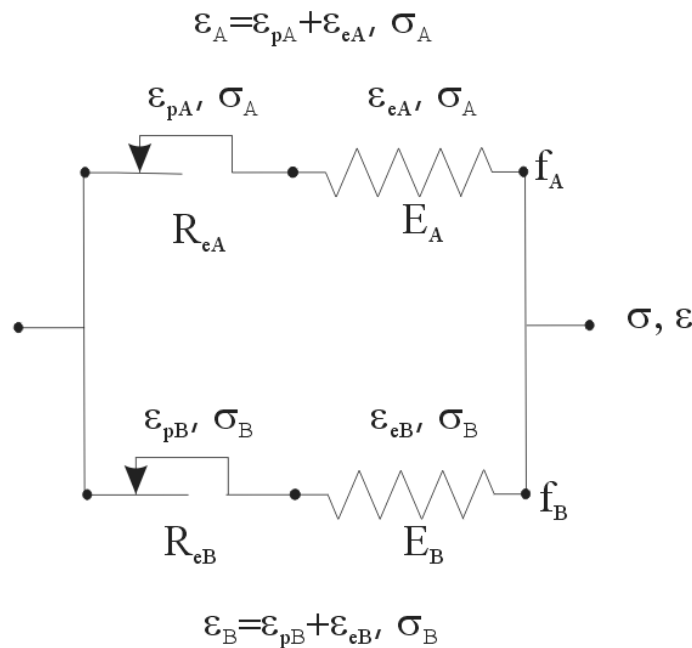
n.b. On considère implicitement que le comportement est élasto-plastique parfait, c.a.d sans écrouissage..

◇ *Assemblages*

Les modèles rhéologiques permettent d’analyser le comportement de matériaux complexes. Des assemblages de comportement pourront être mis en œuvre afin de comprendre le comportement de matériaux hétérogènes ou présentant en tout cas plusieurs mécanismes de déformation.

L’exemple suivant permet de comprendre l’origine de l’écrouissage cinématique. (Voir aussi Problèmes).

On se donne un matériau hétérogène constitué d’une fraction volumique f_A de matériau A, dont le module vaut E_A et la limite d’élasticité R_{eA} et d’une fraction volumique f_B de matériau B dont le module vaut E_B et la limite d’élasticité R_{eB} .



On peut alors écrire pour l’assemblage :

$$\varepsilon = \varepsilon_A = \varepsilon_B \quad \text{avec} \quad \sigma = f_A \sigma_A + f_B \sigma_B \quad \text{avec} \quad f_B = 1 - f_A$$

On suppose que les modules des deux matériaux sont égaux. Alors dans chaque branche :

$$\text{Si } |\sigma_A| < R_{eA} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{eA} = \frac{\sigma_A}{E} \quad \text{sinon } \sigma_A = \pm R_{eA} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{eA} + \varepsilon_{pA} = \frac{\pm R_{eA}}{E} + \varepsilon_{pA}$$

$$\text{Si } |\sigma_B| < R_{eB} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{eB} = \frac{\sigma_B}{E} \quad \text{sinon } \sigma_B = \pm R_{eB} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{eB} + \varepsilon_{pB} = \frac{\pm R_{eB}}{E} + \varepsilon_{pB}$$

Ainsi si les deux matériaux restent élastiques on aura : $\sigma = f_A E \varepsilon + f_B E \varepsilon = E \varepsilon$

Si les deux matériaux se déforment plastiquement (en traction) : $\sigma = f_A R_{eA} + f_B R_{eB}$

Si l'un des deux, par exemple le matériau A reste élastique tandis que l'autre se déforme plastiquement, on aura alors : $\sigma = f_A R_{eA} + f_B E \varepsilon$

Si l'on représente graphiquement la réponse de la branche A, de la branche B et de l'assemblage, on voit naturellement apparaître, par construction un écrouissage cinématique pour l'assemblage alors que ni le matériau A ni le matériau B n'en présente.

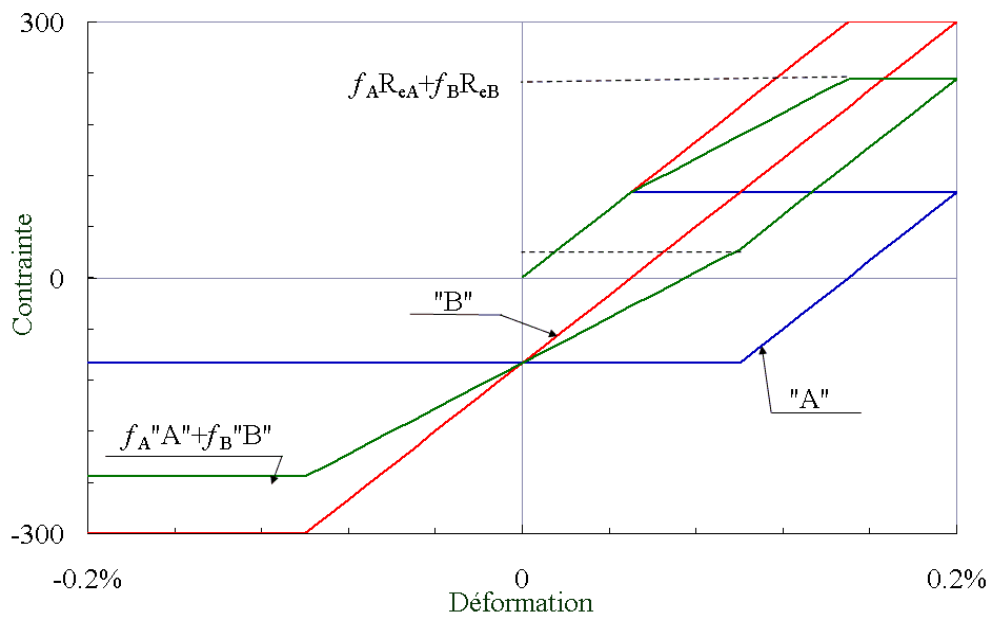


Figure 46 : illustration, réponse de la branche A, de la branche B et de l'assemblage à un essai de traction compression. On observe par construction un écrouissage cinématique pour l'assemblage. $R_{eA}=100$ MPa, $R_{eB}=300$ MPa, $E_A=E_B=200$ GPa. $f_A=1/3$, $f_B=2/3$.

De manière assez générale, on pourra dire que l'apparition d'écrouissage cinématique est dû à l'hétérogénéité de la déformation plastique à l'intérieur du matériau.

4.3 Structure des matériaux métalliques à différentes échelles

4.3.1 Echelle atomique

Les matériaux métalliques à l'état solide se trouvent sous forme cristalline. Les atomes sont arrangés de manière périodique en suivant un motif de base, le type de motif définit la structure du métal. Les métaux peuvent présenter trois structures distinctes, la structure hexagonale compacte (zinc, titane, cobalt...), la structure cubique à faces centrées (aluminium, fer γ , cuivre, nickel...) et la structure cubique centrée (fer α , ...) (Figure 2).

4.3.2 Structure intra-granulaire

Par ailleurs, les métaux sont presque souvent utilisés sous forme d'alliage binaires, ternaires ou encore plus complexe (aluminium-cuivre, fer-carbone ou fer-nickel-chrome, nickel-titane-aluminium etc...). Les éléments d'alliage, peuvent conduire ou non à la formation de structures à l'intérieur des grains.

◇ Solution solide

Tant que la limite de solubilité d'un élément d'alliage dans le matériau de base n'est pas atteinte, cet élément d'alliage va se trouver en solution solide.

- Substitution ou insertion.

On distingue deux types de solution, les solutions en insertion (carbone, hydrogène dans le fer par exemple) et les solutions en substitution (cuivre dans l'aluminium).

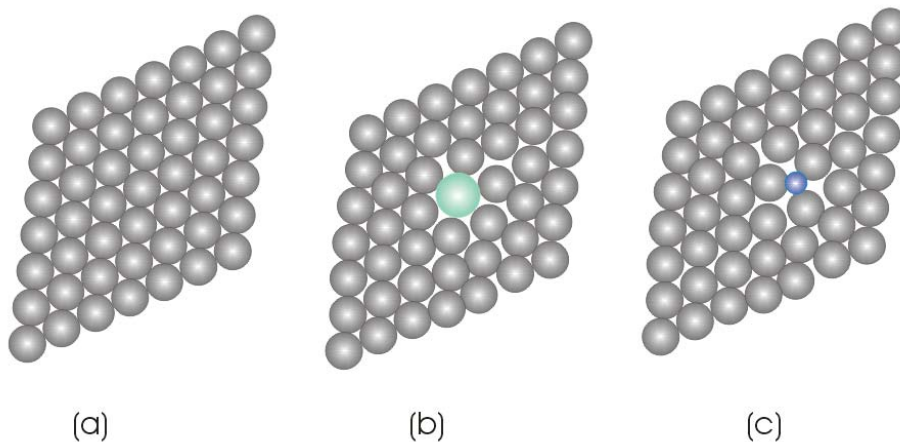


Figure 47 : Illustration (a) réseau parfait, (b) un élément d'alliage en substitution (c) un élément d'alliage en insertion

- Solution solide ordonnée.

Lorsque la quantité d'éléments d'alliage en solution solide augmente, on peut former des structures intermédiaires appelées solutions solides ordonnées. Dans ce cas, tous les plans cristallographiques sont communs entre la matrice et la solution solide ordonnée, qu'on appelle aussi parfois précipité.

C'est le cas par exemple des zones Guinier Preston I (zones GP-I), qui sont des plaquettes monoatomiques de cuivre dans l'aluminium et qui se forment lors du refroidissement rapide d'un alliage d'aluminium à 3 à 4% de cuivre suivi d'un traitement thermique de vieillissement à basse température (Figure 48). Ces plaquettes conduisent à une très forte augmentation de la limite d'élasticité du matériau.

On peut citer aussi les « précipités » γ' dans les superalliages à base de Nickel qui sont utilisés pour réaliser les pièces mécaniques soumises à de très fortes températures et contraintes et avec des durées de fonctionnement importantes (par exemple 700 MPa sous 650°C pendant 20000 heures). On réalise par exemple des disques de turbines de réacteurs d'avion avec ces matériaux (Figure 49).

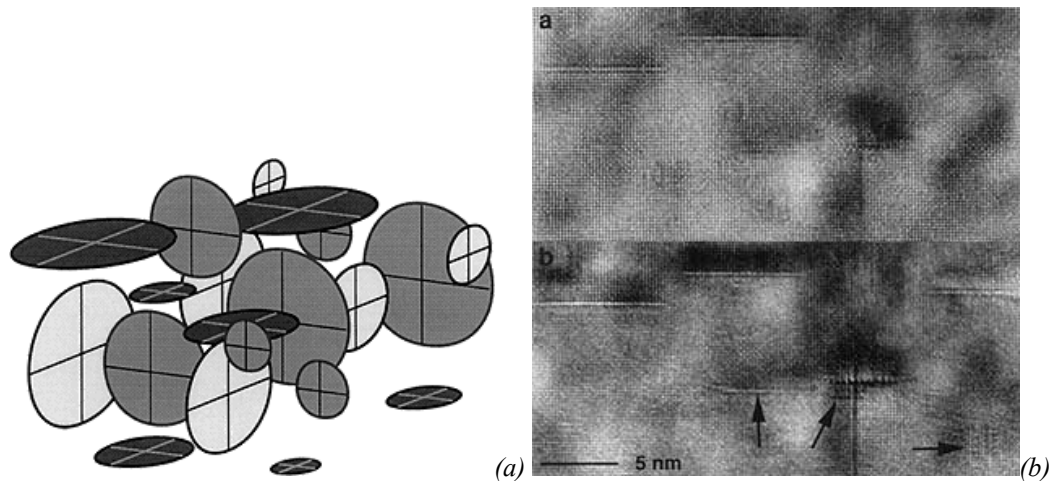


Figure 48 (a) modèle schématique des zones GP-I. (b) Cliché en microscopie électronique à transmission à haute résolution de GP-I dans un alliage d'aluminium à 3.3% de cuivre. (Toyohiko J. Konno, B. Jouffrey). N.b. cette technique de microscopie permet de « voir » les atomes.

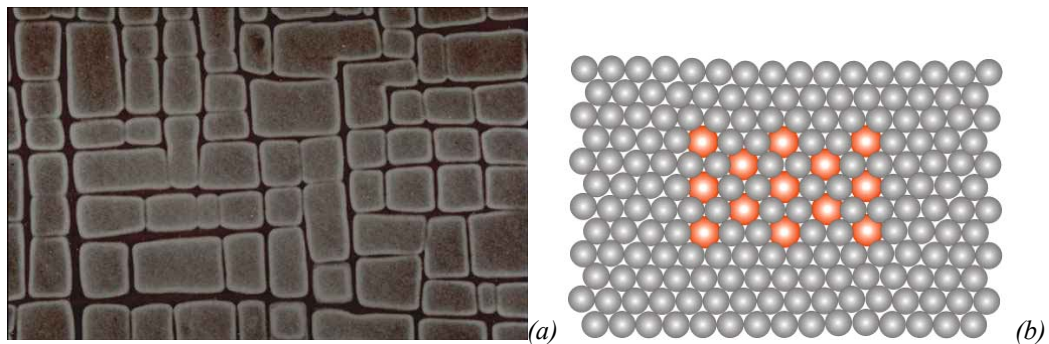


Figure 49 : (a) « précipités » γ , ou Ni_3TiAl dans une matrice de Nickel. Il s'agit en réalité d'une solution solide ordonnée. (Onéra). (b) illustration, solution solide ordonnée, de forme cuboïdale.

◇ Précipités, structures lamellaires.

Lorsque les précipités ou les particules de seconde phase grossissent, ils perdent alors leur cohérence avec le réseau du métal de base. Ils peuvent être semi-cohérents ou même complètement incohérents (Figure 50). En tout cas même si les précipités deviennent incohérents, ils gardent certaines relations d'orientation avec l'orientation cristalline du métal de base. On peut citer par exemple des précipités Al_2Cu dans les alliages d'aluminium-cuivre.

Il existe des structures très variées dans les matériaux biphasés, précipités cubiques, sphériques, en aiguilles ou sous forme de plaquettes, structures lamellaires (Figure 51 a) ou encore de Widmandstätten (Vannerie).

La structure des matériaux biphasés influe considérablement sur le comportement du matériau. Ainsi une fonte grise à graphites lamellaires est-elle fragile tandis qu'une fonte à graphite sphéroïdal peut se déformer plastiquement. C'est en vue d'améliorer telle ou telle propriété mécanique que l'on fait évoluer ces structures.

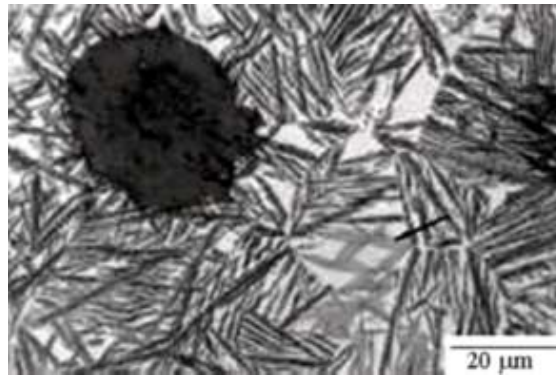
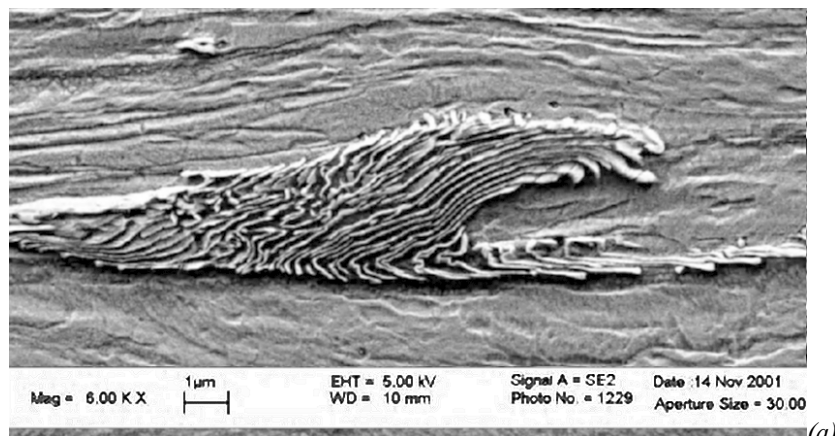
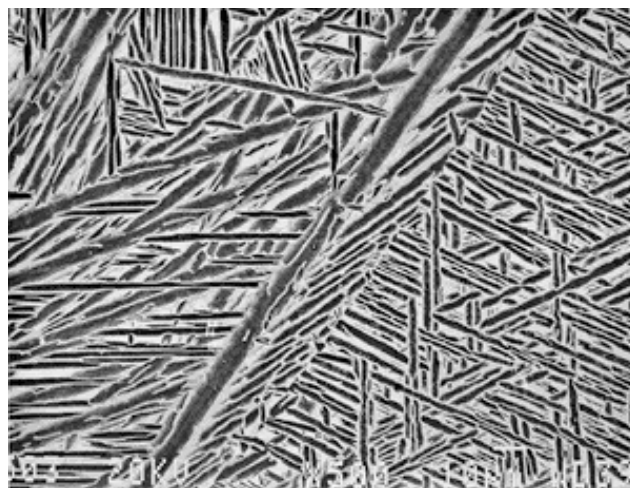


Figure 50 : Fonte à graphites sphéroïdal (ductile) Fe-3.52C-2.51Si-0.49Mn-0.15Mo-0.31Cu wt%. Nodules de graphite (noir) dans une matrice bainitique (austénitisation à 950°C, trempe et maintien à 350°C pendant 64 min) (Badeshia)



(a)



(b)

Figure 51. (a) Structure perlitique dans un acier ferrito-perlitique fortement déformé (ferrite Fe α et carbure de fer Fe₃C) (Antoine Phelippeau). (b) Structure en Widmanstatten ou « vannerie » dans un alliage de titane Ti-6-22-22 (Cyril Cayron).

4.3.3 Echelle des grains ou microstructure

En général on n'emploie pas les matériaux métalliques sous forme monocristalline mais sous forme polycristalline. Le matériau est constitué d'un ensemble de cristallites appelés aussi grains dont l'orientation cristalline peut être quelconque ou non. Lorsque la taille de grain diminue la limite d'élasticité augmente. Le procédé thermo-mécanique mis en oeuvre pour réaliser le matériau permet de faire varier la taille des grains. On peut par exemple par tréfilage intense réduire la dimension de grains de ferrite dans un acier de 50 μm à 300 nm.

La distribution statistique des orientations cristallines des grains s'appelle la *texture cristalline*. Lorsque toutes les orientations cristallines sont équiprobables, la texture est isotrope.

La forme des grains peut également être anisotrope, (grains allongés dans une direction particulière), on parlera alors de texture morphologique.

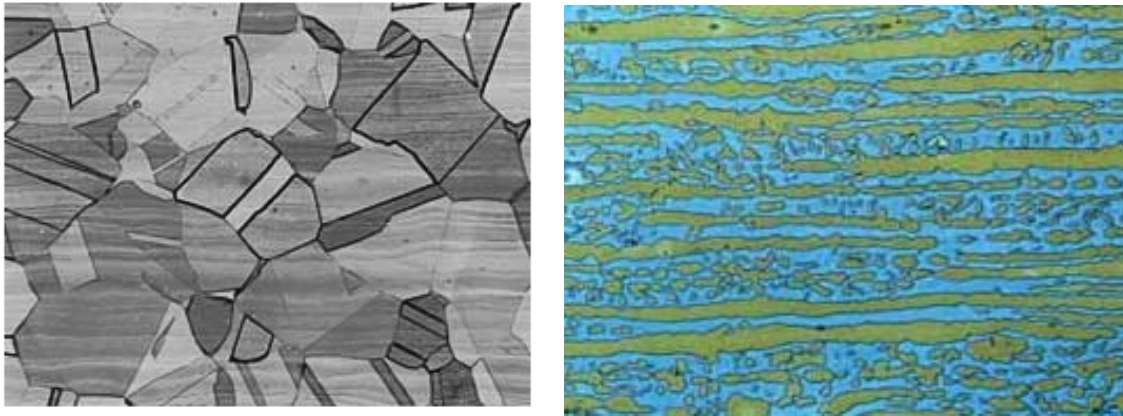


Figure 52 : A gauche Micrographie optique d'un acier austénitique AISI 304. Le matériau est monophasé ($Fe \gamma$ seulement) polycristallin et sans texture morphologique. A droite, AISI 304 duplex. Le matériau est biphasé ($Fe \alpha$, $Fe \gamma$) et présente une texture morphologique (les grains sont allongés).

4.3.4 Macrostructure

Enfin, dans la plupart des composants, des macro-structures se développent à l'échelle du composant. Elles proviennent du procédé de mise en forme. Les plus spectaculaires sont souvent les structures de fonderie.

– Structures de fonderie

Lors de la solidification, les grains ont tendance à se développer à partir des parois des moules, ou sur une surface solide qui sert de précurseur pour le front de solidification (Figure 53a). C'est en général un phénomène ennuyeux qu'on tente de limiter, mais dans certains cas au contraire ce phénomène est exploité pour réaliser une macrostructure optimale.

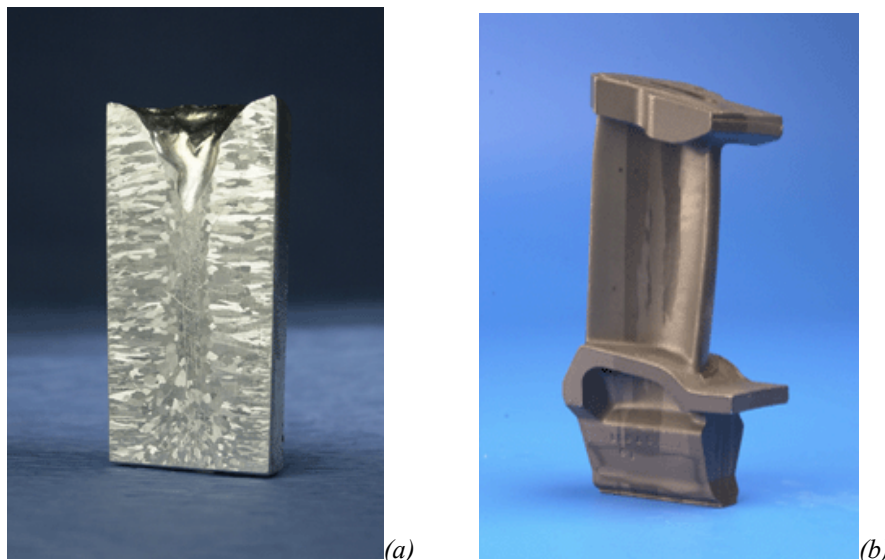


Figure 53 : Structure de fonderie, (a) alliage d'aluminium coulé dans un godet, les grains se sont développés à partir des surfaces vers le centre du godet, (b) aube de turbine réalisée par fonderie avec un front de solidification contrôlé. Les grains ont un axe principal aligné avec celui de l'aube (Badeshia)

Ainsi les aubes de turbine des réacteurs d'avion, avant d'être monocristallines ont été à structure colonnaires. Chaque aube ne contient que quelques grains, et ces grains sont orientés morphologiquement

et cristallographiquement selon l'axe de l'aube (Figure 53b). On peut également réaliser des monocristaux, comme les blocs de silicium avec lesquels ont réalisé des composants pour l'électronique.

Structures de forge

On peut voir se développer aussi des macrostructures dans des matériaux forgés. Si le matériau présente au départ une certaine hétérogénéité (structure en bande pour un acier ferrito-perlitique par exemple), cette hétérogénéité subsiste après la mise en forme mais conserve la mémoire de la déformation qui a été subie lors de la forge par le matériau.

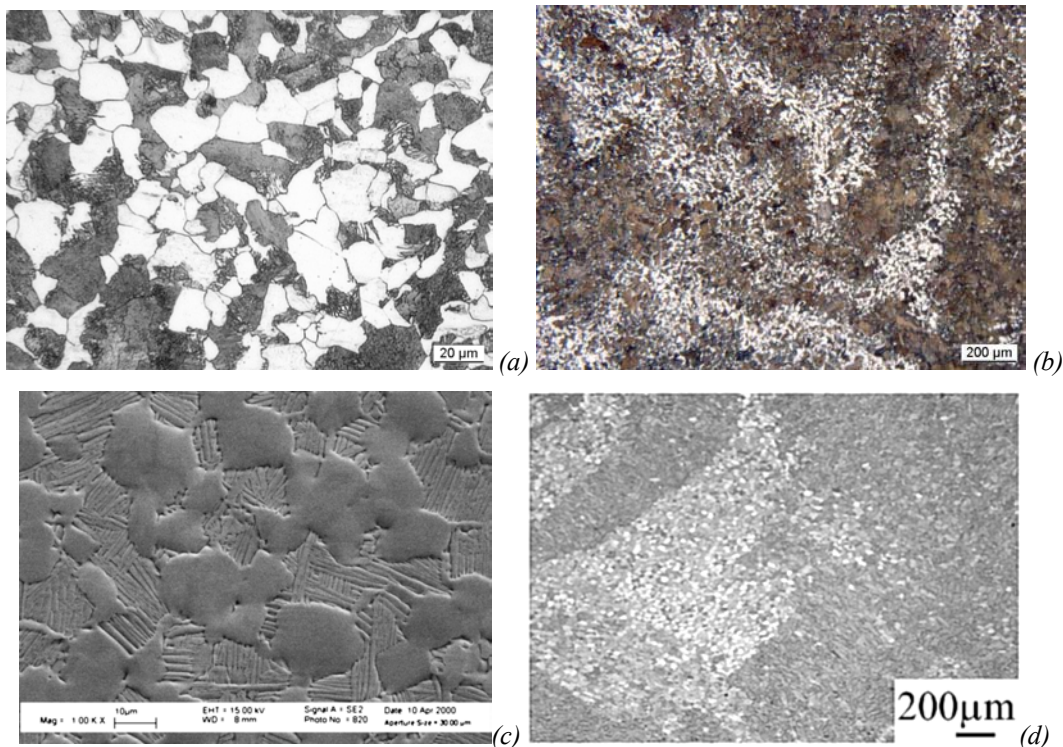


Figure 54 : Exemples de macrostructures de forge. (a) microstructure d'un acier ferrito-perlitique (Rami Hamam), (b) macrostructure de ce même acier. Les zones riches en ferrite et riches en perlite se répartissent en bandes qui se déforiment et se courbent lors de la forge du composant. (c) microstructure d'un alliage de Titane TA6V. (d) macrostructure du même alliage à l'issue de la mise en forme (Kristell Le Biavant).

Autres macrostructures

Enfin on peut citer par curiosité des matériaux composites à matrice métallique, qui présentent une macro-structure à l'échelle du composant. Ici une section d'un alliage de titane renforcé par des fibres longues de carbure de silicium. Les fibres sont alignées selon l'axe de tension maximale. D'autre part on voit sur la micrographie, que les grains de l'alliage de titane se sont développés à partir de la surface des fibres.

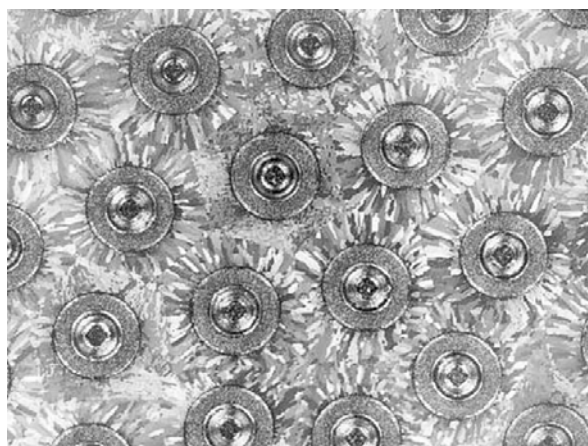


Figure 55 : (© ONERA 1996-2004) Micrographie d'un matériau composite SiC/alliage de titane, coupe transversale..

4.4 Relations structure propriété

4.4.1 Plans de glissements et contrainte d'écoulement

◇ Observations

Les liaisons entre les atomes sont des liaisons dites métalliques, un « gaz d'électrons » assure la cohésion du cristal. Les atomes sont ainsi susceptibles de se déplacer les uns par rapport aux autres sans rupture de liaison, ce qui permet la déformation plastique.

La déformation plastique d'un métal correspond au glissement relatif de plans cristallins.

Le glissement se produit préférentiellement entre plans de plus grande équidistance (qui sont aussi des plans denses) et selon les directions denses. Les plans sont repérés par leur normale (§ 2.3.1).

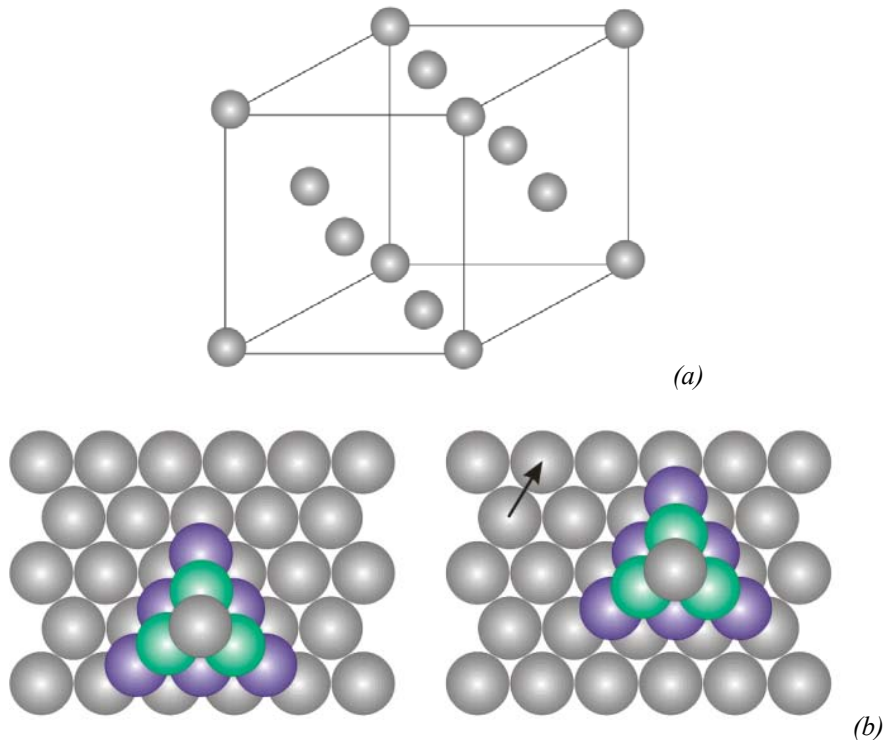


Figure 56 : (a) structure cubique à faces centrées. Les plans denses sont les plans de type (111), (b) vue de dessus d'un empilement de plan (111) dans une structure cubique à faces centrées, avant et après glissement selon une direction dense du plan (111).

Structure cubique à faces centrées : plans denses de type (111) et directions denses de type [110]. La liste des plans et directions de glissement d'un cristal cubique à faces centrées est donnée ci-dessous :

$$\begin{array}{cccc} \vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) & \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) & \vec{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) & \vec{n}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \\ \vec{g}_{11} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) & \vec{g}_{21} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) & \vec{g}_{31} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) & \vec{g}_{41} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \\ \vec{g}_{12} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) & \vec{g}_{22} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) & \vec{g}_{32} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) & \vec{g}_{42} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \\ \vec{g}_{13} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) & \vec{g}_{23} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) & \vec{g}_{33} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) & \vec{g}_{43} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) \end{array}$$

Structure cubique centrée : plans denses de type (110) et directions denses de type [111].

Ceci conduit à tirer quelques règles pour la représentation du comportement élasto-plastique d'un cristal métallique.

- Le comportement élastique doit posséder les symétries de la structure du cristal.
- La déformation plastique correspond au glissement relatif de plans cristallins et se fait donc sans changement de volume.
- Le glissement se fait selon des plans et des directions discrètes de l'espace, qui sont les plans et directions denses de la structure cristalline.

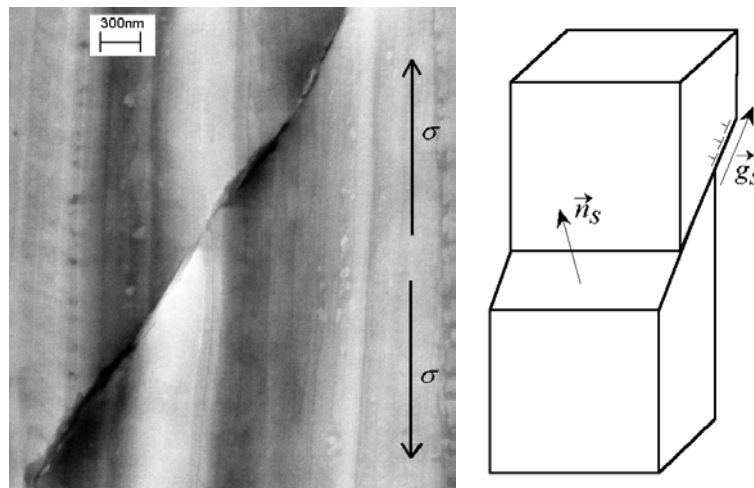


Figure 57 : A gauche, ligne de glissement intense émergeant à la surface d'un acier perlitique fortement tréfilé testé en traction simple [Phelippeau,2001]. A droite, déplacement de deux parties d'un cristal après un glissement sur un plan de glissement de normale n_s et de direction g_s .

◇ Critère de plasticité du monocristal

Compte tenu de ce qui a été rappelé plus haut, on peut proposer un critère de plasticité pour le monocristal.

Supposons que l'on connaisse l'expression du tenseur des contraintes dans le repère du cristal : $\underline{\sigma}$

Supposons que l'on se donne les directions normales aux plans de glissement \vec{n}_i

Supposons également que pour chaque plan de glissement i on se donne les directions de glissement associées \vec{g}_{ij}

Alors la composante de cisaillement τ (ou scission résolue) sur chaque plan de glissement et selon chacune des directions de glissement se calcule comme suit : $\tau = \underline{\sigma} \vec{n}_i \cdot \vec{g}_{ij}$

Parmi l'ensemble des systèmes de glissement, la plasticité se produira sur le système qui subit le cisaillement maximum, soit :

$$\tau_{\max} = \max_i \left[\max_j \left[\underline{\sigma} \vec{n}_i \cdot \vec{g}_{ij} \right] \right]$$

On pourra écrire que le glissement se produit lorsque la contrainte de cisaillement sur le système de glissement le plus favorablement orienté atteint une valeur critique : soit

$$\tau_{\max} < \tau_c \text{ le comportement est élastique}$$

$$\tau_{\max} = \tau_c \text{ glissement plastique}$$

◇ Critère de plasticité de Von Mises

Si le critère de plasticité du monocristal est le plus simple à établir à partir des mécanismes physique de déformation du monocristal, il est par contre assez pénible à mettre en œuvre en pratique. En outre la plupart des matériaux métalliques ne sont pas monocristallins mais polycristallins.

Le critère de plasticité de Von Mises permet de déterminer le seuil d'écoulement plastique d'un matériau métallique polycristallin isotrope. C'est un critère énergétique. Le matériau est supposé entrer en plasticité lorsque son énergie élastique de cisaillement atteint une valeur seuil.

– Enoncé du critère

Pour un tenseur des contraintes diagonal le critère de Von Mises s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)} \quad \text{soit } \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)}$$

Alors si $\sigma_{eq} < R_e$ le comportement est élastique

Si $\sigma_{eq} = R_e$ écoulement plastique

– Démonstration

- Densité d'énergie de déformation élastique de cisaillement

Lorsque le comportement du matériau est élastique, la densité d'énergie de déformation est égale à la densité d'énergie de déformation élastique. Cette densité d'énergie de déformation se calcule comme suit :

$$W(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma} : \underline{D} d\tau \quad \text{où} \quad \underline{a} : \underline{b} = \text{Tr } \underline{a} \underline{b}$$

Comme la déformation plastique se fait sans changement de volume, on partitionne D en un terme de vitesse de changement de volume et un terme complémentaire appelé déviateur.

Le déviateur \underline{a}^D d'un tenseur \underline{a} est défini comme suit : $\underline{a}^D = \underline{a} - \frac{\text{Tra}}{3} \underline{I}$. Compte tenu de cette définition la trace d'un déviateur est toujours nulle

On définit donc

$$\underline{D} = \frac{\text{Tr } \underline{D}}{3} \underline{I} + \underline{D}^D \quad \underline{\sigma} = \frac{\text{Tr } \underline{\sigma}}{3} \underline{I} + \underline{\sigma}^D \quad \underline{\varepsilon}_e = \frac{\text{Tr } \underline{\varepsilon}_e}{3} \underline{I} + \underline{\varepsilon}_e^D$$

On peut alors développer l'expression de la densité d'énergie de déformation :

$$W(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left(\frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3} I + \underline{\sigma}^D \right) : \left(\frac{\text{Tr}\underline{D}}{3} I + \underline{D}^D \right) d\tau$$

$$W(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left(\frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3} I \right) : \left(\frac{\text{Tr}\underline{D}}{3} I \right) d\tau + \int_{\tau=0}^{\tau=t} (\underline{\sigma}^D) : (\underline{D}^D) d\tau + \frac{1}{3} \int_{\tau=0}^{\tau=t} (\text{Tr}\underline{\sigma} [I : \underline{D}^D] + \text{Tr}\underline{D} [\underline{\sigma}^D : I]) d\tau$$

$$W(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3} \text{Tr}\underline{D} d\tau + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma}^D : \underline{D}^D d\tau + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{1}{3} (\text{Tr}\underline{\sigma} \text{Tr}\underline{D}^D + \text{Tr}\underline{D} \text{Tr}\underline{\sigma}^D) d\tau$$

Comme la trace d'un déviateur est nulle et en notant : $p = -\frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3}$ et $\text{Tr}\underline{D} = \frac{d}{dt} \frac{V - V_0}{V_0}$:

$$W(t) = -p \frac{V - V_0}{V_0} + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma}^D : \underline{D}^D d\tau = -p \frac{\Delta V}{V_0} + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma}^D : \underline{D}^D d\tau = W(t)_{\text{vol}} + W(t)_{\text{cis}}$$

On reconnaît dans le premier terme la densité d'énergie élastique de changement de volume, le second terme est le complément à savoir la densité d'énergie élastique de cisaillement, qui est susceptible de promouvoir l'apparition d'une déformation élastique.

En petites déformations et à l'intérieur du domaine d'élasticité : $\underline{D} = \frac{d\underline{\varepsilon}}{dt} = \frac{d\underline{\varepsilon}_e}{dt}$

Si le comportement est élastique et isotrope : $\underline{\varepsilon}_e = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}\underline{\sigma} I$

Le déviateur de D s'écrit donc : $\underline{D}^D = \frac{1+\nu}{E} \frac{d\underline{\sigma}^D}{dt}$

On en déduit :

$$W_{\text{cis}} = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma}^D : \underline{D}^D d\tau = \frac{1+\nu}{E} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \underline{\sigma}^D : \frac{d\underline{\sigma}^D}{dt} d\tau$$

Soit pour l'expression de la densité d'énergie de déformation élastique de cisaillement :

$$W_{\text{cis}} = \frac{1+\nu}{2E} \underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D$$

○ Critère de Von Mises

Le critère de plasticité de Von Mises est un critère d'iso-énergie élastique de cisaillement. C'est-à-dire qu'on suppose que la densité d'énergie de déformation élastique de cisaillement au moment où l'on atteint la limite d'élasticité est la même en traction simple et pour tout autre type de chargement.

En traction simple, au seuil de plasticité on a : $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \text{Re} \end{pmatrix}$

$$\text{Alors le déviateur s'écrit : } \underline{\sigma}^D = \underline{\sigma} - \frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3} I = \begin{pmatrix} -\frac{\text{Re}}{3} & & \\ & -\frac{\text{Re}}{3} & \\ & & \frac{2\text{Re}}{3} \end{pmatrix}$$

Et la densité d'énergie de déformation élastique de cisaillement s'écrit :

$$W_{cis}^{Traction} = \frac{1+\nu}{2E} \left(\frac{6}{9} R_e^2 \right)$$

Pour un chargement quelconque le seuil de plasticité sera atteint pour la même densité d'énergie élastique de cisaillement soit :

$$W_{cis} = \frac{1+\nu}{2E} \underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D = \frac{1+\nu}{2E} \left(\frac{6}{9} R_e^2 \right)$$

Dont on déduit le critère de Von Mises :

Pour un tenseur des contraintes quelconque $\underline{\sigma}$, on définit le déviateur $\underline{\sigma}^D = \underline{\sigma} - \frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3} I$ et la contrainte équivalente de cisaillement de Von Mises $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D}$

Si $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D} < R_e$ le comportement reste élastique

Si $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D} = R_e$ on aura écoulement plastique

◇ Critère de Tresca

Un second critère, le critère de Tresca, est également couramment employé pour les métaux isotropes. C'est un critère en contrainte. Dans ce cas là, la plasticité est supposée se produire lorsque la contrainte de cisaillement maximale atteint une valeur seuil.

– Enoncé du critère de Tresca

Supposons que l'on ait exprimé le tenseur des contraintes dans sa base propre :

Le critère de Tresca s'écrit :

Pour tout $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$ avec $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

Si $|\sigma_3 - \sigma_2| < R_e$ le comportement est élastique

$|\sigma_3 - \sigma_2| = R_e$ écoulement plastique

– Démonstration

Dans le cas d'un polycristal à texture isotrope, toutes les orientations cristallines sont équiprobables. Dans le cas du monocristal on cherchait à déterminer le maximum de la contrainte de

cisaillement sur un ensemble discret de systèmes de glissements. Dans le cas du polycristal on procède de même mais cette fois ci toutes les directions de l'espace vont pouvoir être considérées.

On va chercher à déterminer quel est le plan sur lequel se produit le cisaillement maximum et quelle est l'intensité de ce cisaillement.

$$\text{Chaque plan est repéré par sa normale } \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

On note N la composante normale au plan de normale \vec{n} et τ la composante de cisaillement sur ce plan.

$$\text{Alors : } N = (\underline{\sigma} \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \|\tau\|^2 = ((\underline{\sigma} \vec{n}) - N \vec{n}) \cdot ((\underline{\sigma} \vec{n}) - N \vec{n})$$

$$\text{En développant il vient : } \|\tau\|^2 = (\underline{\sigma} \vec{n}) \cdot (\underline{\sigma} \vec{n}) + N^2 - 2(\underline{\sigma} \vec{n}) \cdot N \vec{n} = (\underline{\sigma} \vec{n}) \cdot (\underline{\sigma} \vec{n}) - N^2$$

Dont on déduit en fonction des composantes du vecteur \vec{n} :

$$\|\tau\|^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$$

La composante de cisaillement sur un plan \vec{n} est extrémale si l'on a simultanément :

$$\frac{\partial \|\tau\|^2}{\partial n_1} = \frac{\partial \|\tau\|^2}{\partial n_2} = \frac{\partial \|\tau\|^2}{\partial n_3} = 0$$

Cette condition s'écrit sous la forme d'un système de trois équations à trois inconnues (n_1, n_2 et n_3) :

$$\begin{cases} 2\sigma_1 n_1 [\sigma_1 - 2(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)] = 0 \\ 2\sigma_2 n_2 [\sigma_2 - 2(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)] = 0 \\ 2\sigma_3 n_3 [\sigma_3 - 2(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)] = 0 \end{cases}$$

Premier cas : Les trois composantes n_i sont non nulles, alors le système d'équations ci-dessus admet une solution si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, c'est le cas particulier de l'application d'une pression hydrostatique pure. Dans ce cas τ présente un minimum, $\tau = 0$.

Second cas : L'une des trois composantes n_i est nulle. Prenons par exemple $n_3 = 0$. On cherche alors la valeur du cisaillement pour une normale \vec{n} telle que :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \|\tau\|^2 = (\sigma_1 \cos \theta)^2 + (\sigma_2 \sin \theta)^2 - (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta)^2$$

En développant il vient :

$$\|\tau\|^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} \sin^2 2\theta$$

Et par ailleurs

$$N = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta$$

La valeur maximale de la composante de cisaillement est obtenue pour $\theta = \pm \pi/4$

- Diagramme de Mohr

On peut remarquer que dans un diagramme (N, τ) (ou plan de Mohr) les expressions obtenues constituent l'équation paramétrique d'un cercle de centre $(N=(\sigma_1+\sigma_2)/2, \tau=0)$ et de rayon $(\sigma_1-\sigma_2)/2$. Cette représentation est appelée un cercle de Mohr.

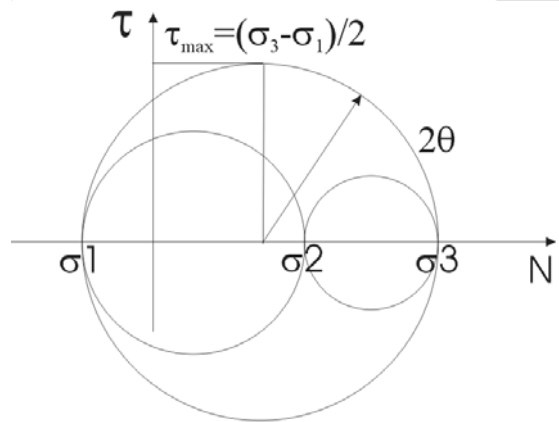


Figure 58 : Représentation de Mohr, le tenseur des contraintes est représenté dans un plan contrainte de cisaillement - contrainte normale.

On en déduit que si le tenseur des contraintes est diagonal avec $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ alors la contrainte de cisaillement maximale vaut $\tau_{\max}=(\sigma_3-\sigma_1)/2$

- Critère de Tresca

On peut maintenant établir le critère de plasticité de Tresca.

En traction simple le tenseur des contraintes se réduit à $\sigma_1=\sigma_2=0, \sigma_3$ croissant. Dans ce cas la contrainte de cisaillement maximale $\tau_{\max}=\sigma_3/2$. Au cours de l'essai de traction on détermine la limite d'élasticité du matériau $\sigma_3=Re$.

Le critère de plasticité de Tresca consiste à postuler que l'écoulement plastique se produit pour une même valeur de la contrainte de cisaillement maximal quel que soit le type de chargement.

Ainsi, si $\tau_{\max} \frac{|\sigma_3 - \sigma_2|}{2} < \frac{R_e}{2}$ le comportement est élastique, sinon il y a écoulement plastique.

- Domaine d'élasticité de Tresca

On peut ainsi représenter le domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes. Considérons par exemple un chargement triaxial. σ_1 et σ_2 sont quelconques et σ_3 est imposée, $\sigma_3=-p$.

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & -p \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$$

La limite d'élasticité en traction simple est Re . On peut alors tracer le domaine d'élasticité du matériau dans un plan (σ_1, σ_2) . Et observer comment ce domaine d'élasticité évolue en fonction de la pression d'hydroformage p .

Cas N°1, $p=0$: Les intersections de la frontière du domaine d'élasticité avec les axes $\sigma_1=0$ ou $\sigma_2=0$ correspondent au cas de la traction simple soit dans la direction 1 soit dans la direction 2. $\sigma_1=\sigma_2$ correspond à une traction biaxiale pure et $\sigma_1=-\sigma_2$ à du cisaillement.

Cas N°2, $p=Re/2$: $\sigma_3=-Re/2$. Le domaine d'élasticité du matériau (dans le plan σ_1, σ_2) se décale selon la diagonale.

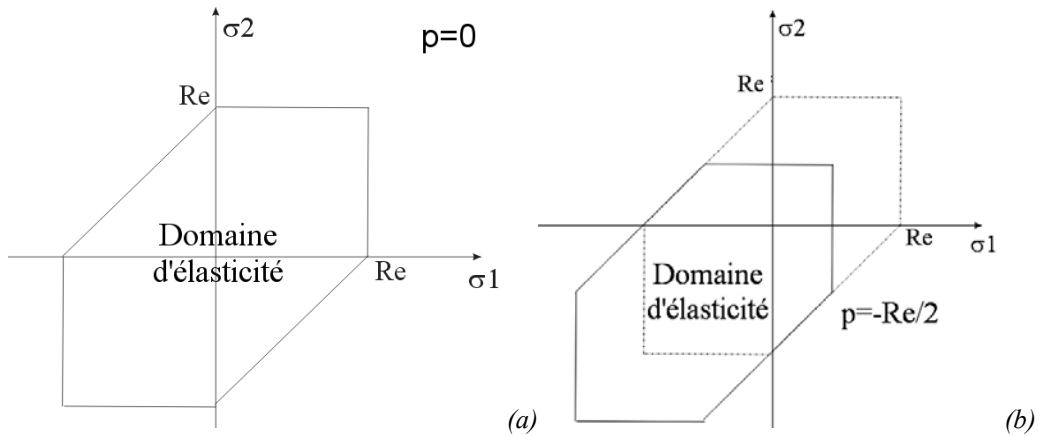


Figure 59 : Tracé du domaine d'élasticité dans un plan (σ_1, σ_2) la valeur de σ_3 étant fixe et imposée égale (a) à zéro, ou égale à (b) $\sigma_3 = -Re/2$.

◇ Représentation graphique des critères de Von Mises et Tresca.

Comme pour le critère de Tresca, le seuil de plasticité de Von Mises peut être tracé dans un plan (σ_1, σ_2) en choisissant par exemple $\sigma_3 = 0$. La coupe du critère de Von Mises dans l'espace des contraintes principales par un plan quelconque est une ellipse.

Les intersections avec les axes $\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_2 = 0$ correspondant à la traction simple sont les mêmes que pour le critère de Tresca ce qui est naturel puisque les deux critères ont été ajustés sur la limite d'élasticité en traction simple. On observe une légère différence en cisaillement ($\sigma_1 = -\sigma_2$). Le critère de Tresca donne un seuil de plasticité en ($\sigma_3 = 0, \sigma_1 = -\sigma_2 = Re/2$) tandis que celui de Von Mises donne un seuil de plasticité en ($\sigma_3 = 0, \sigma_1 = -\sigma_2 = Re/\sqrt{3}$). Mais pour l'essentiel le seuil de plasticité est le même qu'on utilise le critère de Tresca ou celui de Von Mises.

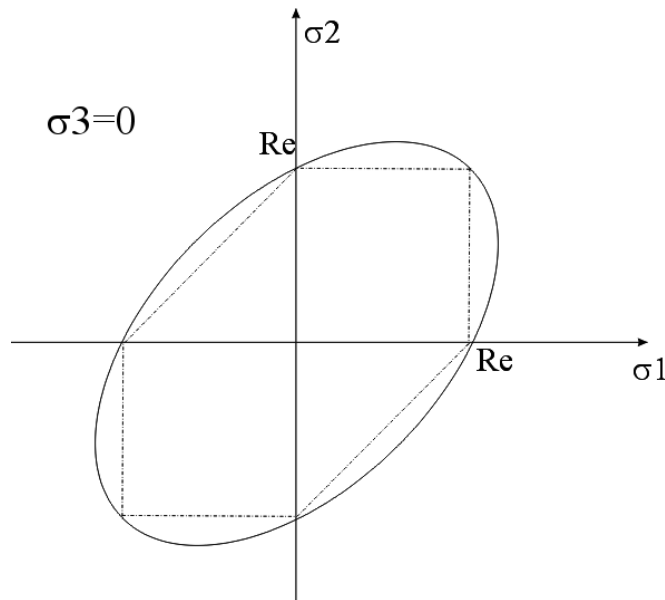


Figure 60 : Coupe du critère de Von Mises dans un plan ($\sigma_3 = 0$), il s'agit d'une ellipse inclinée à 45° . Comparaison avec le critère de Tresca dans le même plan.

◇ Comparaison avec l'expérience

Des essais multiaxiaux ont été réalisés par différentes équipes et permettent de montrer que le critère de Von Mises est bien vérifié expérimentalement. Au cours de ces essais, on impose une déformation mixte de traction et de torsion. On mesure la déformation et le niveau de contrainte de cisaillement et de traction au point où le seuil de plasticité est atteint.

La Figure 61 présente des résultats expérimentaux obtenus lors d'essais de traction-torsion (tous les termes du tenseur des contraintes sont nuls sauf σ_{33} et $\sigma_{23} = \sigma_{32}$). Pour chaque direction de chargement ($\sigma_{23} = \alpha \sigma_{33}$) le seuil de plasticité a été mesuré expérimentalement, et reporté sur le graphe (losanges). En trait plein est reporté le critère de Von Mises. L'accord est excellent.

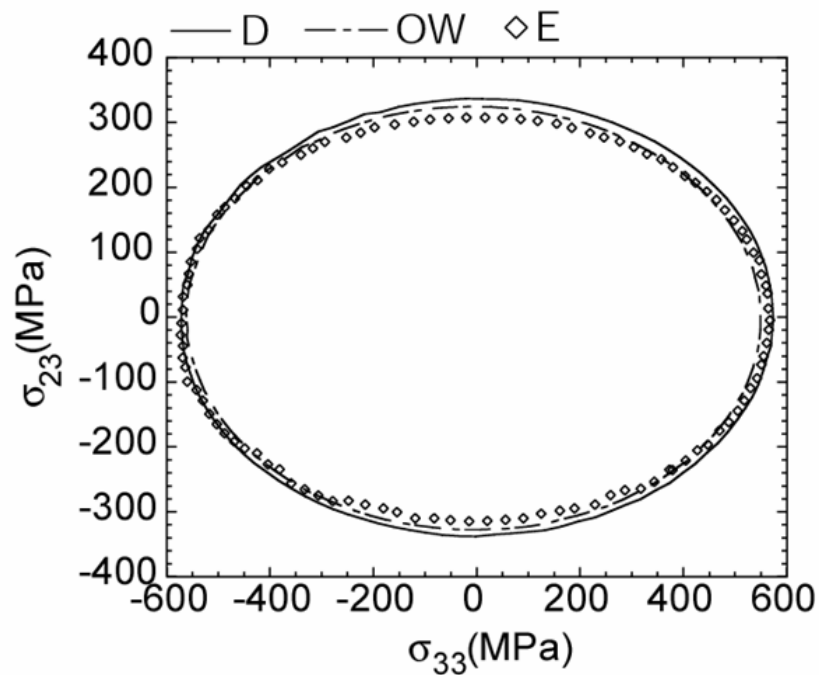


Figure 61 : Seuil de plasticité en traction torsion (Sylvain Calloch)

4.4.2 Prise en compte des écrouissages

◇ *Domaine d'élasticité.*

Lors d'un essai de traction on peut mesurer une variation de la contrainte d'écoulement. Comme il a été dit plus haut (§ 4.2.3), l'augmentation de la contrainte d'écoulement en traction peut provenir de deux sources, une augmentation de la dimension effective du domaine d'élasticité du matériau ou bien un déplacement de ce domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes.

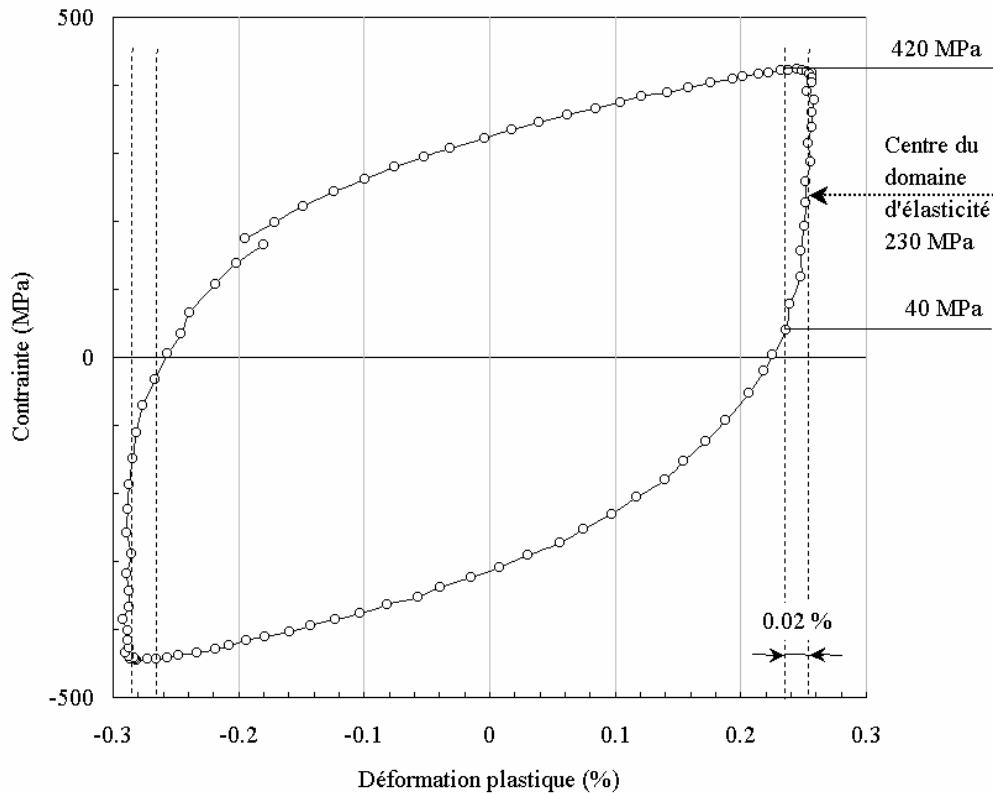


Figure 62 : Exemple de boucle d'hystérésis mesurée à température ambiante, sur un alliage austéno-ferritique vieilli [Leroux,1999]

On notera R la dimension du domaine d'élasticité. Par ailleurs on notera X la position du centre de ce domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes, X est naturellement un tenseur. On peut donc représenter les écrouissages par une augmentation de la taille du domaine d'élasticité (pour un écrouissage isotrope) et un déplacement de la position du centre de ce domaine (pour un écrouissage cinématique).

◇ Généralisation du critère de plasticité de Von Mises

On peut alors tout à fait généraliser la notion de seuil d'écoulement plastique en tenant compte des écrouissages.

Pour un tenseur des contraintes quelconque $\underline{\sigma}$, on définit le déviateur $\underline{\sigma}^D = \underline{\sigma} - \frac{Tr \underline{\sigma}}{3} I$

Si maintenant le centre du domaine d'élasticité peut se décaler, la contrainte équivalente s'écrit :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}})}$$

On en déduit l'expression du seuil f de plasticité, ou surface de charge :

$$f = \sigma_{eq} - R = \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}})} - R$$

Si f est négatif alors le comportement du matériau est élastique

Sinon f reste nul et X et R évoluent avec la déformation plastique.

◇ Représentation dans l'espace des contraintes

On peut représenter l'effet d'un écrouissage cinématique seul ou d'un écrouissage isotrope seul sur la surface seuil de plasticité (Figure 63), par exemple dans un plan traction -torsion. Si l'on fait subir une compression simple monotone au matériau, la dimension du domaine augmente si l'écrouissage est un écrouissage isotrope, tandis qu'il se déplace selon l'axe de compression si l'écrouissage est un écrouissage cinématique.

Ces évolutions ont été vérifiées expérimentalement. Et l'on voit bien que si l'on change de direction de chargement, il est très important de savoir quel est le type d'écrouissage du matériau, si l'on veut être capable de prévoir correctement le seuil d'écoulement plastique du matériau.

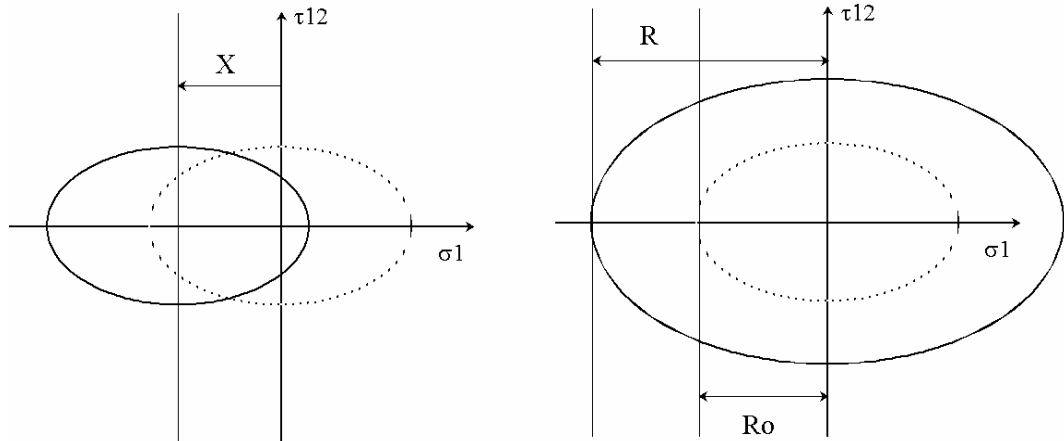


Figure 63 : Évolution de la surface seuil en traction-torsion après une compression uniaxiale, à gauche avec un écrouissage cinématique, à droite avec un écrouissage isotrope.

◇ Loi d'écoulement plastique

Connaissant la position du seuil d'écoulement plastique du matériau, on peut prévoir la direction de la déformation plastique. Ceci se démontre en s'appuyant sur le principe de minimisation de la dissipation d'énergie au cours de la déformation plastique. Mais la démonstration est hors programme.

Si f est la surface seuil du domaine d'élasticité alors la loi d'écoulement plastique s'écrit :

$$\frac{d\underline{\varepsilon}_p}{dt} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

Où $\dot{\lambda}$ est une constante à déterminer. Cette loi d'écoulement est aussi appelée, hypothèse de normalité. Une représentation graphique permet de comprendre l'origine de ce nom :

Prenons par exemple la représentation de la surface seuil dans un plan principal ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3=0$). On a déjà montré qu'il s'agit d'une ellipse. Compte tenu de l'expression de la vitesse de déformation plastique : $\frac{d\underline{\varepsilon}_p}{dt} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$, on peut dire que la direction de l'écoulement plastique est normale à la surface f .

Prenons par exemple le chargement suivant : $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_o}{2} \\ \sigma_o \\ 0 \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$

Si le seuil de plasticité s'écrit simplement : $f = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma^D : \sigma^D} - R$

Alors la vitesse de déformation plastique s'écrira : $\frac{d\underline{\varepsilon}_p}{dt} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \lambda \frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}^D}{\sigma_{eq}} \Rightarrow \frac{d\underline{\varepsilon}_p}{dt} \propto \underline{\sigma}^D$

C'est-à-dire que la vitesse de déformation plastique est proportionnelle au déviateur des contraintes. Ceci traduit tout simplement le fait que la déformation plastique se fait sans changement de volume.

Au seuil de plasticité, $\sigma_{eq}=R$. La direction de la vitesse de déformation plastique est celle du déviateur, qui vaut ici :

$$\text{Soit ici : } \underline{\sigma}^D = \underline{\sigma} - \frac{\text{Tr}\underline{\sigma}}{3} \underline{I} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{\sigma_o}{2} & \\ & & -\frac{\sigma_o}{2} \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$$

On peut représenter graphiquement la direction du déviateur dans le plan des contraintes, et l'on constate bien que cette direction est normale à la surface seuil, d'où le terme d'hypothèse de normalité :

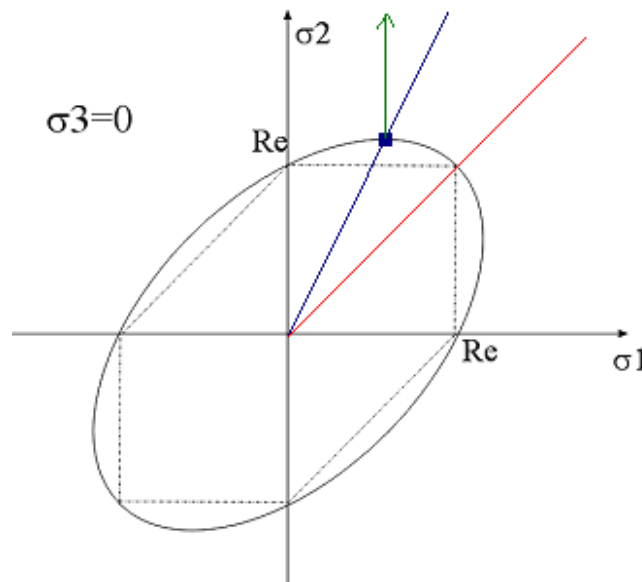


Figure 64 : seuil de plasticité et direction de l'écoulement plastique.

4.4.3 Dislocations, effet de taille de grain et viscosité.

Le fait que la déformation plastique des matériaux métalliques consiste en un glissement relatif de plans cristallins permet de comprendre pourquoi la déformation plastique se fait sans changement de volume et d'exprimer des critères de plasticité (Von Mises, Tresca, Monocrystal) dont la forme et les évolutions avec l'écroutissage sont tout à fait en accord avec l'expérience.

Cependant ceci ne suffit pas à expliquer un certain nombre de phénomènes observés dans la pratique. Par exemple, la forte dépendance de la limite d'élasticité d'un matériau à sa taille de grain, ou encore les mécanismes à l'origine de l'écroutissage isotrope ou au contraire de l'adoucissement cyclique, ou enfin le comportement élasto-visco-plastique des métaux à haute température.

Pour comprendre l'origine de ces effets il faut tenir compte de l'existence de défauts cristallins appelés dislocations. Ce concept a été introduit par Taylor (1934) qui cherchait à calculer directement la contrainte seuil d'écoulement d'un matériau (ou au moins un ordre de grandeur) à partir de l'énergie de cohésion du cristal.

◇ Paradoxe de Taylor

Le raisonnement est le suivant. Si deux plans atomiques glissent l'un par rapport à l'autre, pour passer d'une position à une autre, il faut franchir un col d'énergie ou de contrainte appliquée. Puis on passe par une position intermédiaire, pour laquelle il est équivalent de revenir en arrière dans la configuration à l'équilibre qu'on vient de laisser ou de poursuivre pour rejoindre la nouvelle position d'équilibre. Ainsi la contrainte à appliquer passe t-elle par un maximum, puis par zéro à mi-parcours avant d'être rappelée à la nouvelle position d'équilibre.

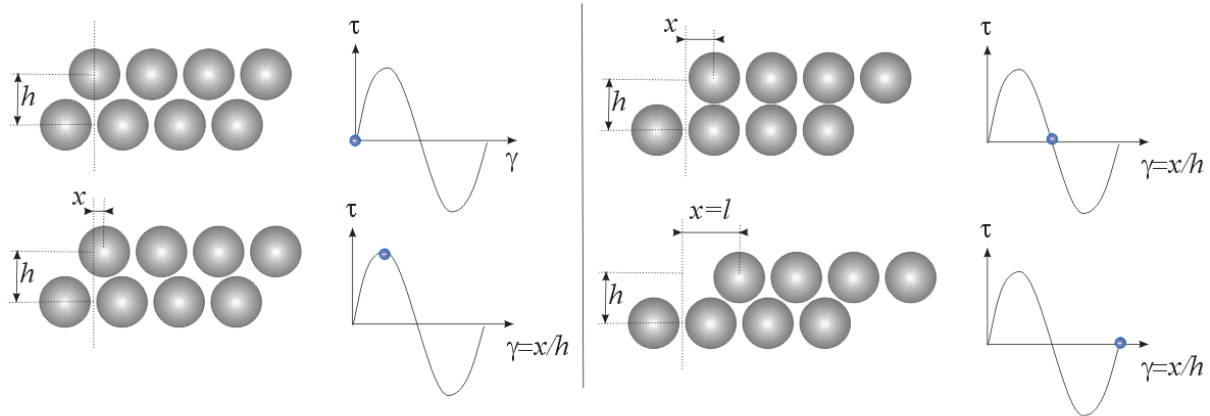


Figure 65 : illustration, évolution de la contrainte de cisaillement lors du déplacement relatif de deux plans cristallins d'une distance interatomique l .

L'expression de la contrainte est alors la suivante :

$$\tau = \tau_{\max} \sin\left(2\pi \frac{x}{l}\right) = \tau_{\max} \sin\left(2\pi \frac{\gamma}{\gamma_o}\right) \quad \text{où } \gamma_o = \frac{l}{h}$$

La pente de cette courbe à l'origine nous donne le module d'élasticité en cisaillement μ .

$$\mu = \frac{d\tau}{d\gamma} = \frac{\tau_{\max}}{\gamma_o} 2\pi \quad \text{où } \gamma_o = \frac{l}{h} \approx 1$$

On en déduit ainsi l'ordre de grandeur de la contrainte de cisaillement maximale, en fonction du module d'élasticité de cisaillement :

$$\tau_{\max} \approx \frac{\mu}{2\pi} \approx \frac{E}{4\pi(1+\nu)} \Rightarrow R_e \approx \frac{E}{10}$$

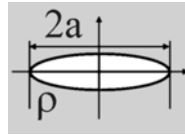
On trouve ainsi avec ce raisonnement simple que la limite d'élasticité d'un matériau devrait être de l'ordre de grandeur d'un dixième du module d'élasticité. Ce qui est bien au dessus de la réalité.

Ainsi pour un acier doux, le module d'élasticité est de 200GPa, on devrait donc trouver une limite d'élasticité de l'ordre de 20000 MPa tandis que les valeurs expérimentales sont plutôt de l'ordre de 200 MPa.

A l'époque Taylor, a proposé qu'il devait exister dans le matériau des concentrateurs de contrainte permettant d'augmenter la contrainte locale par rapport à la contrainte macroscopique par un facteur 100. La solution de la concentration de contrainte par une cavité elliptique était alors connue, si $2a$ est le grand axe de l'ellipse, et r son rayon de courbure le plus petit, alors si σ_o est la contrainte à l'infini la contrainte locale est notée σ et la concentration de contrainte Kt .

Compte tenu des moyens d'observation de l'époque, il n'était pas possible de distinguer des détails de dimension inférieure à $1\mu\text{m}$. Comme il était impossible de voir ces concentrateurs de contrainte, Taylor en a conclu que leur plus grande dimension devait être inférieure au seuil de résolution de son moyen d'observation. Ceci impliquait que la plus petite dimension soit alors inférieure au nanomètre c'est-à-dire proche des distances interatomiques.

$$K_t = \frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \Rightarrow \rho = a \left(\frac{2}{K_t - 1} \right)^2 \quad \text{si } \begin{cases} K_t \approx 100 \\ a \leq 1 \mu\text{m} \end{cases} \Rightarrow \rho \leq 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$



Il existe de nombreux défauts cristallins. Le plus flagrant est le joint de grain (Figure 66) entre deux cristaux par ailleurs parfaits. Par ailleurs un atome isolé peut manquer dans l'empilement cristallin, on parlera alors de lacune. Enfin, une dernière catégorie de défaut a été imaginée, par Taylor et Orowan, puis observée, dès que les moyens d'observation l'ont permis. Ces défauts appelés dislocations ont la particularité d'être mobiles ce qui leur permet de contribuer à la déformation du matériau. .

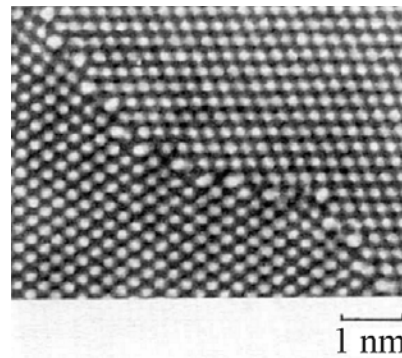


Figure 66 : Joint de grain en microscopie électronique à transmission à haute résolution. (Dorlot)

◇ Dislocations

– Observation

La dislocation est une distorsion du réseau cristallin très localisée selon deux directions et très étendue dans la troisième direction. On peut l'assimiler à une ligne. On observe ainsi très bien en microscopie à transmission les zones distordues d'un réseau cristallin (Figure 67), qui apparaissent comme des lignes noires. Il n'est pas rare d'observer des lignes de dislocation qui traversent tout le grain.

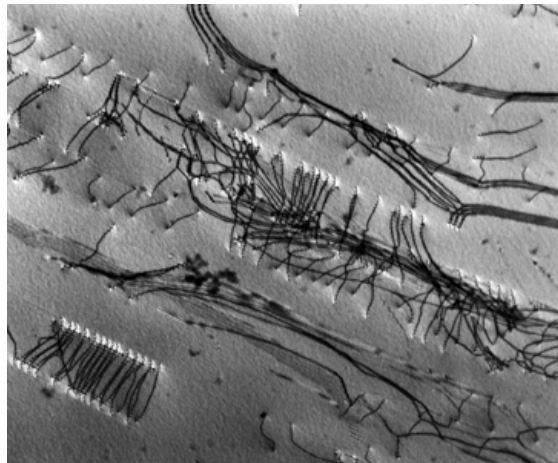


Figure 67 : observation en microscopie à transmission de lignes de dislocation dans un acier inoxydable 316 L (Cyril Cayron)

– Dislocations vis et coin, vecteur de Burgers

La dislocation est donc un défaut linéique. Il en existe schématiquement de deux types, les dislocations vis et les dislocations coin. Sur la Figure 68b est représentée une dislocation coin, la ligne de dislocation est ici perpendiculaire au plan de coupe. On peut définir le vecteur de burgers de la dislocation

en imaginant un circuit fermé suivant la matière dans le cristal parfait puis le même circuit dans le cristal contenant un défaut (Figure 68a et b). Le circuit est ouvert lorsque le cristal contient un défaut.

Le vecteur liant les deux extrémités du circuit est appelée le vecteur de Burgers, et noté \mathbf{b} .

Ce vecteur est orthogonal à la ligne de dislocation dans le cas d'une dislocation coin et parallèle dans le cas d'une dislocation vis.

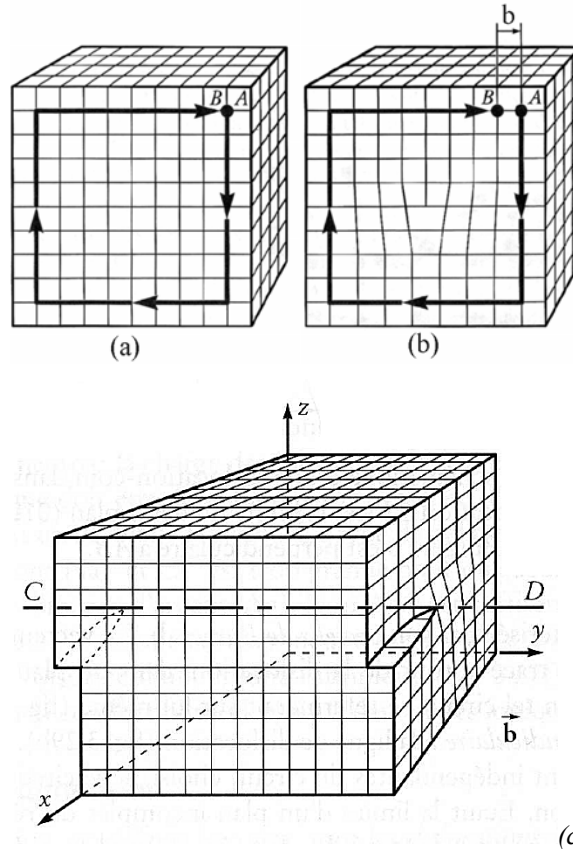


Figure 68 : cristal parfait (a). Dislocations coin (b) et vis (c) (Dorlot)

- Mobilité des dislocations et déformation.

La particularité des dislocations, par rapport aux joints de grains et autres défauts cristallins, c'est qu'elles sont aisément mobiles. Ainsi, si l'on soumet un cristal sans défaut à une contrainte de cisaillement il se déforme d'abord élastiquement, puis une source de dislocation peut être activée et le défaut se déplace de proche en proche.

La déformation plastique d'un élément de volume est acquise lorsqu'une dislocation a débouché à la surface de l'élément de volume (Figure 69). Les dislocations qui débouchent en surface peuvent provenir de l'extérieur et traverser le volume de part en part ou bien être créées à l'intérieur du volume au niveau d'une source de dislocations. La déformation plastique provient donc du *flux* des dislocations à travers les frontières de l'élément de volume représentatif. Tant que les dislocations n'ont pas débouché en surface, il existe des contraintes internes dans l'élément de volume, dues à la distorsion du réseau cristallin autour des dislocations stockées dans cet élément de volume.

Ainsi le mécanisme de déformation plastique est bien un glissement relatif de plans cristallin, mais ce glissement s'effectue progressivement par l'intermédiaire du glissement de défauts mobiles appelés dislocations.

Les dislocations étant d'efficaces concentrateurs de contraintes, la contrainte de cisaillement nécessaire au glissement relatif de deux plans cristallin est bien plus faible en présence qu'en l'absence de dislocations.

En revanche, le mouvement des deux plans cristallins n'est pas instantané, il faut aux dislocations le temps de balayer toute la surface du cristal pour obtenir un déplacement relatif \mathbf{b} , aussi ce mécanisme est-il sensible à la vitesse de déformation. Ce phénomène est non négligeable sur les métaux et doit être

pris en compte, pour des températures élevées ($T/T_f > 1/2$) ou pour de très grandes gammes de vitesses de déformation (crash automobile, impacts...).

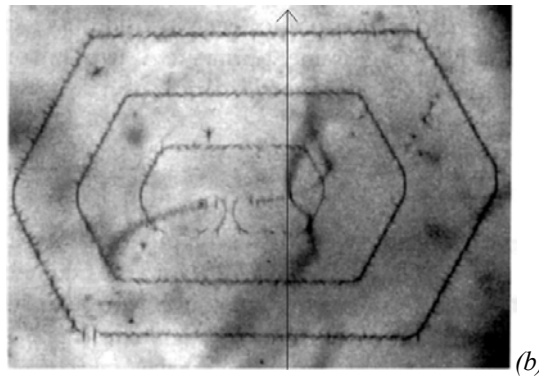
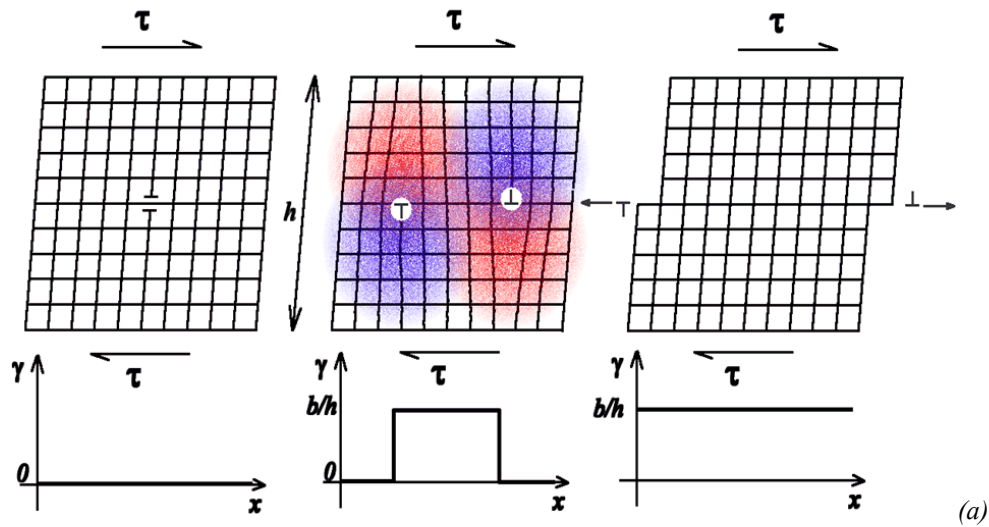


Figure 69 : (a) illustration, mobilité des dislocations et déformation plastique. La déformation plastique (notée ici γ) dans le matériau est représentée en fonction de la position dans le cristal. Entre deux dislocations de signes opposés le matériau a subi une déformation b/h où b est le vecteur de Burgers et h la hauteur de la bande de cristal considérée. (b) cliché (Dorlot) de microscopie à transmission d'un ensemble de boucles de dislocation. La coupe de la figure (a) pourrait correspondre à la ligne verticale sur cette photo.

Comme les dislocations glissent sur leur plan cristallin, les distorsions du réseau cristallin gênent leur mouvement. Tous les défauts cristallins constituent donc des obstacles au mouvement des dislocations et sont donc susceptibles d'augmenter la contrainte d'écoulement du matériau.

Parmi ces défauts, on peut citer en premier lieu les dislocations elles-mêmes, c'est ce qui explique pourquoi lorsqu'on déforme plastiquement un matériau, il peut présenter un écrouissage isotrope. Il faut créer et faire glisser des dislocations pour obtenir une déformation plastique, mais ces dislocations sont un obstacle au glissement d'autres dislocations. Ainsi progressivement le matériau se durcit il lorsqu'on le déforme plastiquement.

D'autres obstacles peuvent aussi gêner ou empêcher le mouvement des dislocations, les joints de grain, les précipités, la solution solide etc ...Aussi réalise t'on des matériaux à structure complexe afin d'augmenter leur contrainte d'écoulement.

– Champ de contrainte autour d'une dislocation coin

Autour d'une dislocation les liaisons entre les atomes sont perturbées. Typiquement pour une dislocation coin, au dessus de la dislocation le réseau se trouve en compression tandis qu'en dessous il est en traction.

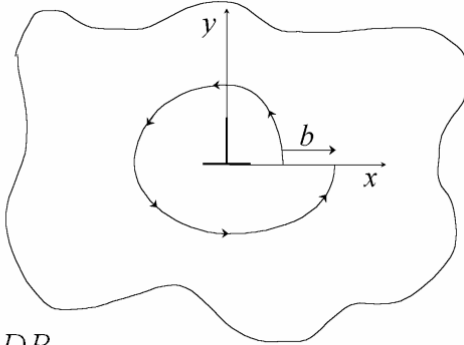
En assimilant le réseau cristallin à un milieu continu élastique, le champ de contrainte autour de la dislocation peut être déterminé (Voir [Hull,1984]).

$$\sigma_{xx}^\perp(x, y) = \frac{2\mu b}{\pi(\kappa + 1)} \left[-\frac{y}{r^4} (3x^2 + y^2) \right]$$

$$\sigma_{yy}^\perp(x, y) = \frac{2\mu b}{\pi(\kappa + 1)} \left[+\frac{y}{r^4} (x^2 - y^2) \right]$$

$$\sigma_{xy}^\perp(x, y) = \frac{2\mu b}{\pi(\kappa + 1)} \left[+\frac{x}{r^4} (x^2 - y^2) \right]$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\kappa = 3 - 4\nu$ en DP



- Energie d'une dislocation

Ainsi, si la dislocation est un concentrateur de contrainte efficace et permet le glissement plastique pour de faibles niveaux de contrainte, il faut néanmoins fournir une certaine énergie pour créer ces défauts. Cette énergie est l'énergie élastique du réseau cristallin distordu. Connaissant le champ de contrainte de la dislocation, il est assez simple de calculer l'énergie Γ par unité de longueur de la dislocation :

$$\Gamma = \alpha \cdot \mu b^2 / \text{unité de longueur}$$

L'énergie est proportionnelle au module d'élasticité en cisaillement du matériau et au carré du vecteur de Burgers. Le coefficient α dépend de la nature de la dislocation vis ou coin, il varie typiquement entre 1 et 3.

◇ Effets d'échelle, Loi de Hall Petch.

Le fait qu'il faille fournir de l'énergie pour créer les dislocations qui vont permettre la plasticité est à l'origine d'effet d'échelle sur la limite d'élasticité du matériau.

Ainsi il a été observé depuis longtemps que la contrainte d'écoulement dans un matériau métallique est une fonction de la taille des grains. Par exemple (Figure 70), lorsqu'un acier à 0.7% de carbone est fortement tréfilé, la contrainte maximale du matériau R_m augmente d'un facteur 2.5 lorsque le diamètre du fil est divisé par un facteur 7 environ. La taille de grain évolue à peu près de la même manière.

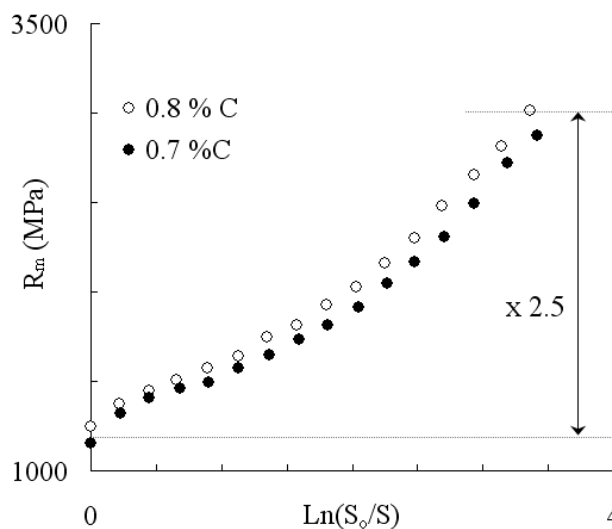


Figure 70 : contrainte maximale mesurée lors d'un essai de traction sur des fils de renfort pour pneumatiques, en fonction du degré de tréfilage préalable appliqué au fil. (Antoine Phelippeau).

Ces résultats ont été observés dans divers matériaux et on peut ainsi écrire que la contrainte d'écoulement évolue comme l'inverse de la racine de la taille des grains, notée D :

$$\text{Loi de Hall et Petch} : R_m = \frac{K}{\sqrt{D}}$$

Cet effet est expliqué (plusieurs modèles différents existent) par l'existence des dislocations.

Très schématiquement, cet effet peut se justifier très simplement de la façon suivante. Pour déformer plastiquement un cristal cubique de côté h il faut fournir d'une part une énergie E_1 correspondant au travail de la dislocation lorsqu'elle traverse de part en part le cristal (énergie proportionnelle à la surface balayée (soit h^2), et d'autre part une énergie E_2 correspondant à la distorsion du réseau autour de la dislocation créée. Comme c'est une ligne de dislocation qui est créée, cette fois-ci l'énergie est proportionnelle au périmètre du cube soit $4h$.

$$E \approx \tau \cdot \gamma \cdot V = \tau \cdot \frac{b}{h} \cdot h^3 = E_1 + E_2 \quad \text{avec} \quad E_1 = r \cdot b \cdot h^2 \quad \text{et} \quad E_2 = \alpha \mu b^2 \cdot 4h$$

On en déduit :

$$\tau = r + 4\alpha\mu \frac{b}{h}$$

On trouve une fonction un peu différente de la loi de Hall et Petch, sur les plages de tailles de grain usuelles, il est difficile de toute manière de faire la différence.

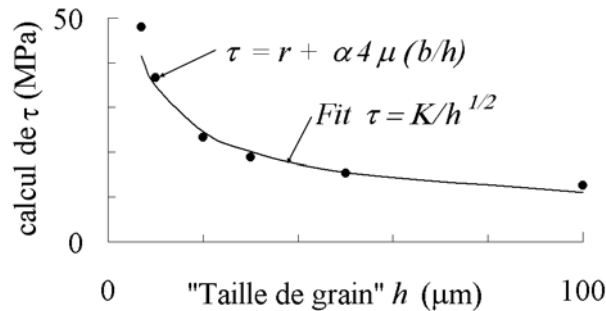


Figure 71 : Calcul de la contrainte de cisaillement avec des valeurs réalistes (acier : $r=10\text{MPa}$, $\alpha=3$, $b=2.886 \text{ \AA}$, $\mu=76 \text{ GPa}$), comparaison avec la loi de Hall Petch sur le même jeu de données (bon accord si $K=110 \text{ MPa} \cdot \mu\text{m}^{1/2}$), et pour une plage de taille de grain réaliste aussi ($5 \mu\text{m}$ à $100 \mu\text{m}$).

◇ Adoucissement cyclique, endommagement.

Une autre conséquence de l'existence des dislocations est la localisation de la déformation plastique dans des bandes de cisaillement intense. En effet, il suffit de regarder la forme du champ de contrainte autour d'une dislocation pour constater que plusieurs dislocations auront tendance à s'auto-organiser afin de minimiser les contraintes dans le réseau cristallin.

Cette localisation peut avoir plusieurs conséquences.

Par exemple le cisaillement répété de précipités dans un matériau biphasé peut avoir tendance progressivement à dissoudre ces précipités (Figure 72a). Comme les précipités avaient pour rôle de durcir le matériau, on observe alors de l'adoucissement du matériau avec la déformation plastique.

A l'extrême des fissures peuvent apparaître sur ces lignes de glissement intenses (Figure 72b). Les dislocations sont alors à l'origine d'un endommagement en surface du matériau qui pourra ensuite conduire à l'apparition de fissures et à la rupture.

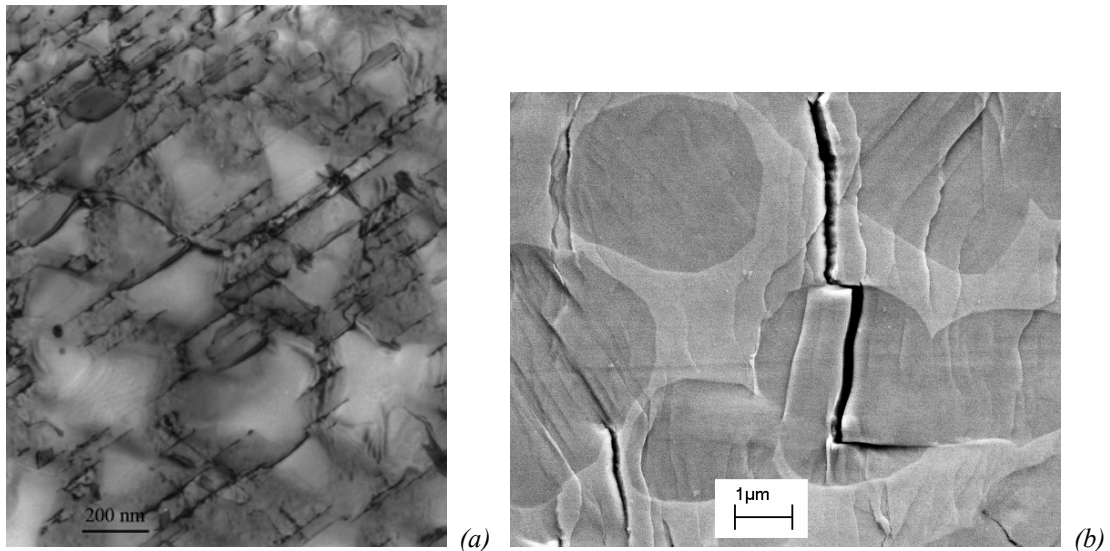


Figure 72 : (a) dislocations parfaites qui cisailent les précipités γ' ou de type I dans le superalliage à base de nickel N18 à 650°C [Pommier,1996], (b) Lignes de glissement intenses débouchant à la surface d'un échantillon de Ti17 sollicité en fatigue alternée. Cet alliage de Titane est biphasé. En sombre : nodules de titane de structure hexagonale, en clair matrice de titane de structure cubique centrée. (Marco Sampablo 1999)

◇ Relation avec la viscosité des métaux à haute température

Comme on l'a déjà évoqué plus haut, le fait que le glissement relatif de deux plans cristallins ne se produise pas instantanément mais par l'intermédiaire du glissement d'une dislocation, fait intervenir le facteur temps. Ainsi, les matériaux métalliques pourront présenter une certaine sensibilité à la vitesse.

– Fréquence caractéristique

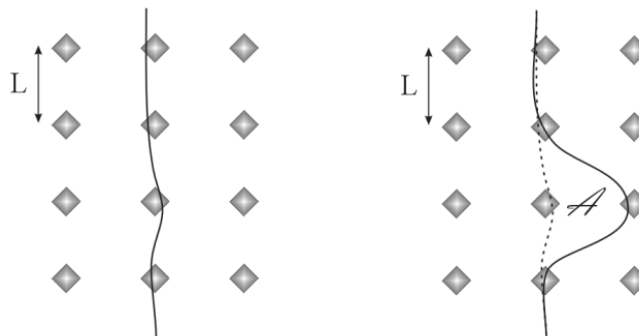
Celle-ci peut s'expliquer de la manière suivante. Lorsqu'on chauffe un matériau métallique, les atomes se mettent à vibrer autour de leur position d'équilibre avec une fréquence caractéristique qui dépend de la température et du type de matériau. Cette fréquence est notée ν , et est également la fréquence de saut des atomes d'une position à une autre (auto-diffusion) :

$$\nu = \nu_D \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right)$$

Où ν_D est la fréquence fondamentale de Debye, T la température et Q la chaleur fournie au matériau. Le mouvement des dislocations se produira alors en phase avec les vibrations du cristal.

Lors de leur déplacement les dislocations « sauteront » d'une position à une autre en phase avec les vibrations du cristal. De même elles franchiront les obstacles avec une fréquence liée à la fréquence fondamentale de vibration du cristal :

$$\nu_{obs} = r_a \cdot \nu_D \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right)$$



– Déformation associée à un franchissement d'obstacle

Supposons maintenant qu'une dislocation glisse dans un plan sur lequel existe un réseau carré d'obstacles (précipités par exemple) à une distance L les uns des autres.

Si la dislocation balaye un plan d'aire S , alors un cristal de hauteur h se déforme d'une quantité b/h . Si maintenant la dislocation une aire A , la déformation se calcule à l'aide d'une règle de trois :

$$\gamma_1 = \frac{b}{h} \frac{A}{S} = \frac{bA}{V}$$

Chaque segment de longueur $2L$ est susceptible de se décrocher et de provoquer une augmentation de la déformation plastique. Si maintenant le cristal contient une longueur totale l de dislocations, la déformation totale sera donc, en introduisant la densité de dislocation ρ (m/m^3) :

$$\gamma_\rho = \frac{l}{2L} \frac{b}{V} A = \rho \frac{bA}{L} \approx \rho bL \quad \text{avec } A \approx L^2$$

– Vitesse de déformation

La vitesse de déformation est le produit de la déformation résultant des franchissements d'obstacles des dislocations présentes dans le cristal par la fréquence de franchissement d'obstacle. Ainsi :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_\rho v_{obs} = \rho bL \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right)$$

Pour pouvoir franchir les obstacles il faut que l'énergie interne du système soit égale à une valeur seuil qui dépend de l'obstacle, on l'appelle l'énergie d'activation de l'obstacle E_o .

Cette énergie interne est fournie sous la forme de travail et de chaleur :

$$E_o = Q + W = Q + \tau V^* \Rightarrow Q = E_o - \tau V^*$$

Le travail est celui de la contrainte appliquée sur une surface qui correspond plus ou moins à la ligne de dislocation ($b \cdot L$) et qui travaille sur une longueur qui correspond au franchissement de l'obstacle. Ceci reste assez qualitatif. De toutes manières, pour de simples raisons d'homogénéité, on écrit que le travail mécanique est égal au produit de la contrainte appliquée par un volume, appelé le volume d'activation de l'obstacle et noté V^* .

– Loi de comportement

On en déduit la relation entre la contrainte appliquée et la vitesse de déformation plastique :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \rho bL \exp\left(-\frac{E_o - \tau V^*}{kT}\right)$$

Si le produit σV^* est inférieur à l'énergie d'activation E_o , alors les dislocations ne glissent pas, le comportement reste élastique. Ainsi cette écriture correspond elle à une loi de viscosité avec seuil. On parle alors de comportement élasto-visco-plastique. La forme générale est la suivante :

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \dot{\varepsilon}_p^o \exp\left(\frac{\langle \sigma V^* - E_o \rangle}{kT}\right)$$

– Identification des paramètres

On détermine le volume d'activation V^* en réalisant des essais à température contrôlée et à vitesses de déformation imposée, en général les courbes de traction sont parallèles mais lorsque la vitesse augmente, la contrainte augmente aussi, l'écart entre les courbes permet de calculer le volume d'activation V^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varepsilon_{pa}}{dt} = \dot{\varepsilon}_p^o \exp\left(\frac{\sigma_a V^* - E_o}{kT}\right) \\ \frac{d\varepsilon_{pb}}{dt} = \dot{\varepsilon}_p^o \exp\left(\frac{\sigma_b V^* - E_o}{kT}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow V^* = \frac{kT \cdot \text{Ln}(\dot{\varepsilon}_{pb} / \dot{\varepsilon}_{pa})}{\sigma_b - \sigma_a}$$

Typiquement lors des essais on observe que V^* diminue lorsque la déformation plastique augmente, traduisant l'augmentation de densité des dislocations. Par ailleurs, dans certains cas des modèles physiques permettent de lier rigoureusement le volume d'activation mesuré à l'échelle macroscopique à la nature des obstacles à l'échelle des dislocations.

Un fois le volume d'activation connu, on détermine l'énergie d'activation E_o en réalisant des essais de fluage à différentes températures.

- Loi de Norton

Lorsque la plage de vitesse de déformation n'est pas trop large (2 à 3 décades) et que la température est constante, on préfère habituellement utiliser une loi de Norton qui s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \frac{\langle \sigma - \sigma_o \rangle^m}{K}$$

4.5 Résumé

Matériaux métalliques

Les matériaux métalliques présentent une structure cristalline. Les liaisons entre les atomes, de type métallique, permettent le mouvement des atomes tout en maintenant la cohésion du cristal. On décrit leur structure à différentes échelles

- Atomique : structure CC, CFC et HC.
- Intragranulaire, cas des alliages, solution solide, précipités, structure lamellaire.
- Granulaire : taille et forme des grains, texture cristallographique
- Macroscopique : structure de fonderie, structure de forge, composites à matrice métallique.

Plasticité

Les matériaux métalliques présentent essentiellement un comportement plastique

- Origine de la déformation plastique : glissement relatif de plans cristallins, sans changement de volume.
- Mécanisme permettant le glissement de ces plans cristallins : mouvement de dislocations, défauts à l'origine de la viscosité des métaux, des effets d'échelle et de certains endommagements.

Les grandeurs à retenir pour un matériau élasto-plastique sont :

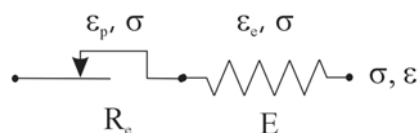
- La limite d'élasticité conventionnelle $R_{p0.2\%}$ ou $R_{p0.02\%}$
- La contrainte maximale R_m
- L'allongement plastique réparti. $A\%p$.
- Existence d'érouissage cinématique X et isotrope R .

Relation de comportement (cas uniaxial), modèle rhéologiques :

- Hypothèse de partition des déformations $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ avec $\sigma = E\varepsilon_e$
- Pour la partie plastique :

$$\text{Si } -R_e < \sigma < +R_e \Rightarrow \frac{d\varepsilon_p}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \text{Si } \frac{d\varepsilon_p}{dt} \neq 0 \Rightarrow \sigma = \pm R_e$$

- Symbole :



Relation de comportement (cas général) :

- Surface seuil de plasticité de Von Mises

$$f = \sigma_{eq} - R = \sqrt{\frac{3}{2}(\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}}):(\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}})} - R, \quad \frac{d\varepsilon_p}{dt} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\sigma}}^D}{\sigma_{eq}}$$

Si f est négatif alors le comportement du matériau est élastique. Sinon f reste nul et X et R évoluent avec la déformation plastique.

4.6 Problèmes

4.6.1 Matériau biphasé et écrouissage cinématique.

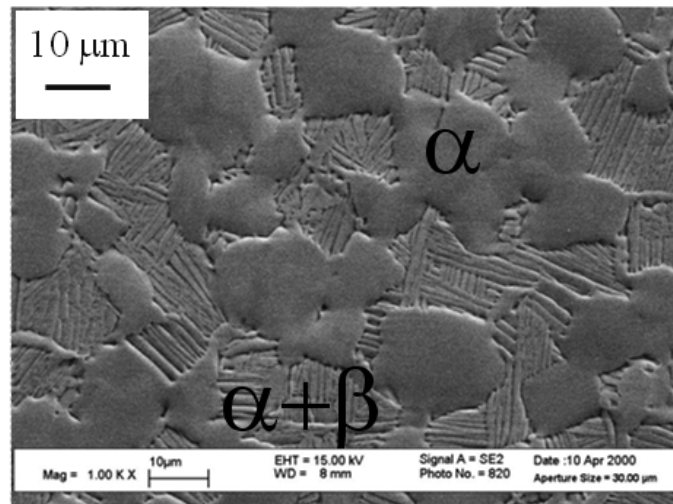
Représentation du comportement élasto-plastique d'un matériau hétérogène (par exemple biphasé) à l'aide d'un modèle rhéologique simple. Mise en évidence d'un écrouissage de type cinématique et relation avec l'hétérogénéité de déformation interne du matériau.

On étudie le comportement d'un matériau biphasé, le TA6V, utilisé notamment pour fabriquer les aubes de compresseur FAN des réacteurs CFM56 qui équipent de nombreux avions civils (TA6V à microstructure duplex : grains monophasés de Titane à structure hexagonale compacte $Ti\alpha$, et grains à sous structure lamellaire, constitués de lamelles de $Ti\alpha$ dans une matrice de Titane à structure cubique centrée $Ti\beta$).

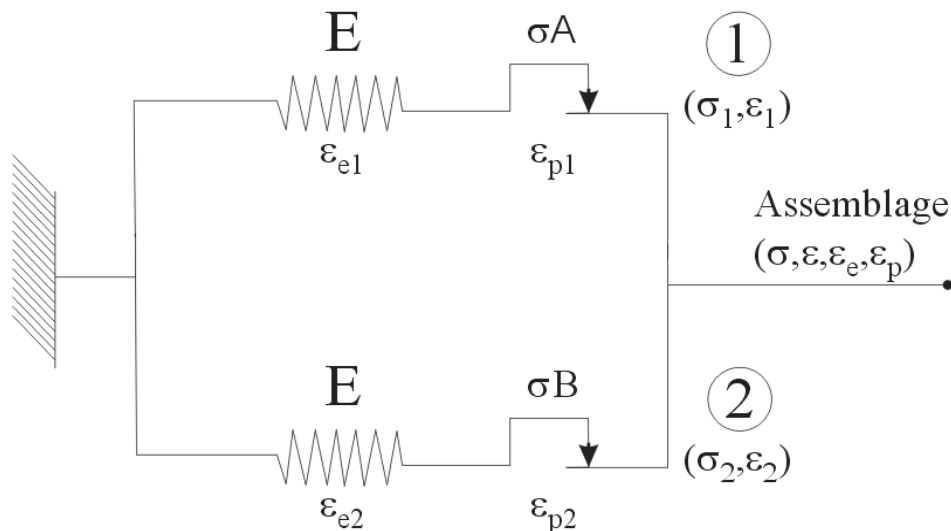
Les grains lamellaires, sont difficiles à déformer, et donc « durs », tandis que les grains monophasés sont « mous ». Les deux familles de grains sont susceptibles de se déformer plastiquement.

On représente donc le matériau par un modèle à deux branches parallèles à une même déformation ε .

- Branche 1 : Contrainte σ_1 , déformation élastique ε_{e1} déformation plastique ε_{p1} . Matériau A : représente les grains monophasés « mous », auxquels on associe une fraction volumique $f_A=50\%$, un module d'élasticité E , une limite d'élasticité σ_A , et un comportement élasto-plastique parfait.
- Branche 2 : Contrainte σ_2 , déformation élastique ε_{e2} déformation plastique ε_{p2} . Matériau B : représente les grains « durs » à sous structure lamellaire auxquels on associe une fraction volumique $f_B=50\%$, un module d'élasticité E , une limite d'élasticité σ_B et un comportement élasto-plastique parfait.



Microstructure duplex : nodules α monophasés
et nodules à sous-structure lamellaire $\alpha+\beta$



◇ **Question 1** : Comportement en traction simple

- Domaine (E) : Aucun des deux patins n'est « glissant »
 - Donner σ , ε , ε_e et ε_p dans chacune des deux branches et pour l'assemblage.
 - Comment peut on qualifier le comportement de l'assemblage.
 - Quelle est la limite ε^* de ce domaine.
 - A.N Sur la feuille jointe tracer la réponse du matériau A, du matériau B et du matériau biphasé A+B, pour $E=150$ GPa, $\sigma_A=300$ MPa, $\sigma_B=1500$ MPa.
- Domaine (H) : Seul le patin de la branche (1) est « glissant »
 - Donner σ , ε , ε_e et ε_p dans chacune des deux branches et pour l'assemblage.
 - Comment peut on qualifier le comportement de l'assemblage. Donner l'expression de la contrainte σ en fonction de la déformation plastique de l'assemblage ε_p .
 - Quelle est la limite supérieure ε^{**} de ce domaine.

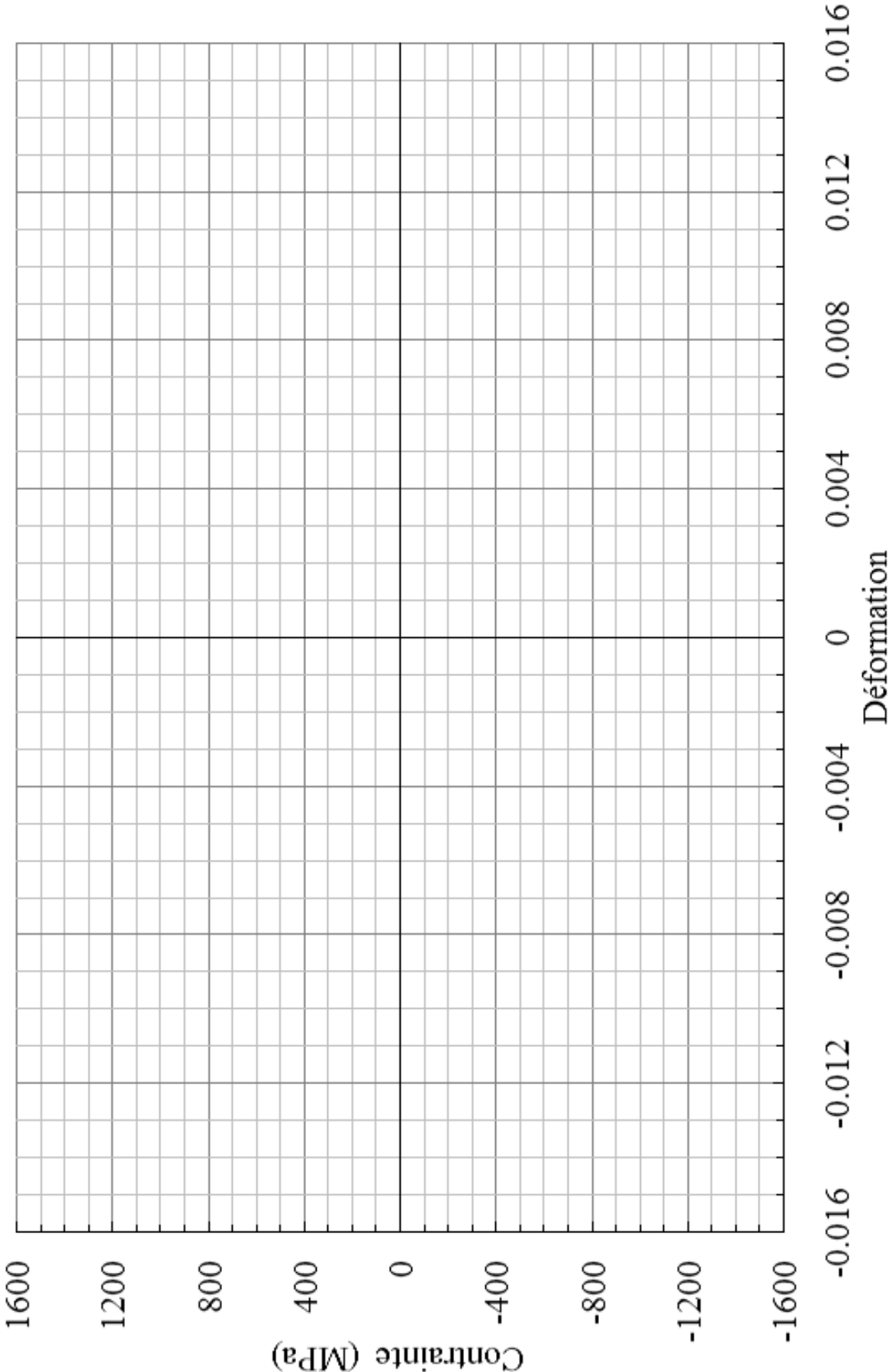
- A.N Sur la feuille jointe tracer la réponse du matériau A, du matériau B et du matériau biphasé A+B, pour $E=150$ GPa, $\sigma_A=300$ MPa, $\sigma_B=1500$ MPa.
- Domaine (S) : Les deux patins des branches (1) et (2) sont « glissants »
 - Donner σ , ε , ε_e et ε_p dans chacune des deux branches et pour l'assemblage.
 - Comment peut on qualifier le comportement de l'assemblage.
 - A.N Sur la feuille jointe tracer la réponse du matériau A, du matériau B et du matériau biphasé A+B, pour $E=150$ GPa, $\sigma_A=300$ MPa, $\sigma_B=1500$ MPa.

◇ **Question 2 : Comportement cyclique**

- A $t = t_0$, on décharge l'assemblage depuis un point ($\varepsilon_0, \sigma_0, \varepsilon_{p0}$) du domaine (S).
 - Comment se comportent les « matériaux » de chacune des branches. Comment se comporte l'assemblage.
 - Déterminer le seuil de plasticité en compression de l'assemblage.
 - Déterminer la dimension du domaine d'élasticité R.
 - Déterminer le centre du domaine d'élasticité X.
 - A.N Sur la feuille jointe tracer la réponse du matériau A, du matériau B et du matériau biphasé A+B, pour $\varepsilon_0=12 \cdot 10^{-3}$, $E=150$ GPa, $\sigma_A=300$ MPa, $\sigma_B=1500$ MPa.
- A $t = t_0$, on décharge l'assemblage depuis un point ($\varepsilon_0, \sigma_0, \varepsilon_{p0}$) du domaine (H).
 - Comment se comportent les « matériaux » de chacune des branches. Comment se comporte l'assemblage.
 - Déterminer le seuil de plasticité en compression de l'assemblage.
 - Déterminer la dimension du domaine d'élasticité R.
 - Déterminer le centre du domaine d'élasticité X. Exprimer X en fonction de ε_p . Exprimer X en fonction et ε_{p1} et ε_{p2} .
 - A.N Sur la feuille jointe tracer la réponse du matériau A, du matériau B et du matériau biphasé A+B, pour $\varepsilon_0=6 \cdot 10^{-3}$, $E=150$ GPa, $\sigma_A=300$ MPa, $\sigma_B=1500$ MPa.

◇ **Question 3 : Mécanismes à l'origine de l'érouissage cinématique**

- On associe maintenant une dimension à chacune des barres (épaisseur e , largeur $l/2$). Calculez le couple \mathbf{M} transmis en tête d'assemblage, dans le domaine (S), au cours d'une décharge élastique depuis le domaine (S). Comparez avec l'évolution de X dans le domaine (S) au cours d'une décharge élastique depuis le domaine (S)
- \mathbf{X} et \mathbf{M} sont ils fonction : de ε_p , de la moyenne de ε_{p1} et ε_{p2} ou de la différence de ε_{p1} et ε_{p2} ? Trouver une expression de \mathbf{X} en fonction des déformations plastiques qui soit valable dans les trois domaines (E), (H) et (S) et lors des décharges.
- Conclure sur l'origine physique de l'érouissage cinématique.



4.6.2 Dépouillement d'un essai de traction simple

Analyse d'un essai de traction simple. Déformation conventionnelle ou rationnelle. Limite d'élasticité conventionnelle $R_{p0.2\%}$. Critère de plasticité de Von Mises.

Les données du tableau 1 ont été obtenues lors d'un essai de traction sur une éprouvette d'acier doux à 0.38% de Carbone, à fût cylindrique de diamètre $D=12$ mm et de longueur utile $L=20$ mm. Un extensomètre a été monté sur l'éprouvette. L'écartement initial l_0 des couteaux de l'extensomètre est égal à 10 mm. On mesure l'évolution de l'écartement l des couteaux de l'extensomètre en fonction de l'effort appliqué sur l'éprouvette lors de l'essai.

N° du point	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Allongement	0	0.014	0.034	0.051	0.129	0.208	0.481	0.825	1.25	1.44	1.57	1.75
$l - l_0$ (mm)												
Effort (kN)	0	30.3	62.5	59.2	59.5	68.4	84.3	91.2	91.7	90.3	87.1	78.1

◇ *Question 1 : Exploitation de la courbe de traction*

- Estimez le module d'élasticité du matériau
- Estimez la limite d'élasticité du matériau R_e , et calculez sa limite d'élasticité conventionnelle $R_{p0.2\%}$.
- Etudiez les différentes parties de la courbe. En particulier, que se passe-t'il au point 4 et entre les points 4 et 5.
- Donner les taux d'érouissage $d\sigma/d\epsilon_p$ entre les points 6 et 7, calculés soit à l'aide de la courbe de traction conventionnelle, soit à l'aide de la courbe de traction rationnelle, discutez.
- Déterminer la contrainte maximale en traction R_m du matériau.
- Que se passe-t'il lors de la striction ? Déterminez la déformation plastique conventionnelle de l'éprouvette au début de la striction.

◇ *Question 2 : Critère de Plasticité*

Le matériau obéit au critère de Von Mises :

$$Tr[\sigma_D : \sigma_D] = \frac{2}{3} R_e^2 \quad \text{avec} \quad \sigma_D = \sigma - \frac{Tr[\sigma]}{3} I.$$

Le matériau est soumis à une sollicitation de traction-torsion :
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Préciser la limite d'élasticité en traction simple ($\sigma_{xy}=0$)
- Précisez la limite d'élasticité en torsion simple ($\sigma_{xx}=0$)
- Dans un plan $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy})$, tracez et justifiez l'allure de la frontière du domaine d'élasticité du matériau.

Le matériau est soumis à une sollicitation biaxiale :
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Préciser les intersections avec les axes ($\sigma_{xx}=0$) et ($\sigma_{yy}=0$)
- Préciser les intersection avec les axes ($\sigma_{xx}=\sigma_{yy}$) et ($\sigma_{xx}=-\sigma_{yy}$)
- Dans un plan (σ_{xx} , σ_{yy}), tracez et justifier l'allure de la frontière du domaine d'élasticité du matériau.

◇ **Question 3 : Ecoulement cinématique**

On souhaite modéliser le comportement plastique de ce matériau par un écoulement cinématique linéaire X . Le domaine d'élasticité s'écrit alors :

$$f = \text{Tr}[(\sigma_D - X) : (\sigma_D - X)] - \frac{2}{3} R_e^2 \quad \text{avec} \quad \sigma_D = \sigma - \frac{\text{Tr}[\sigma]}{3} I .$$

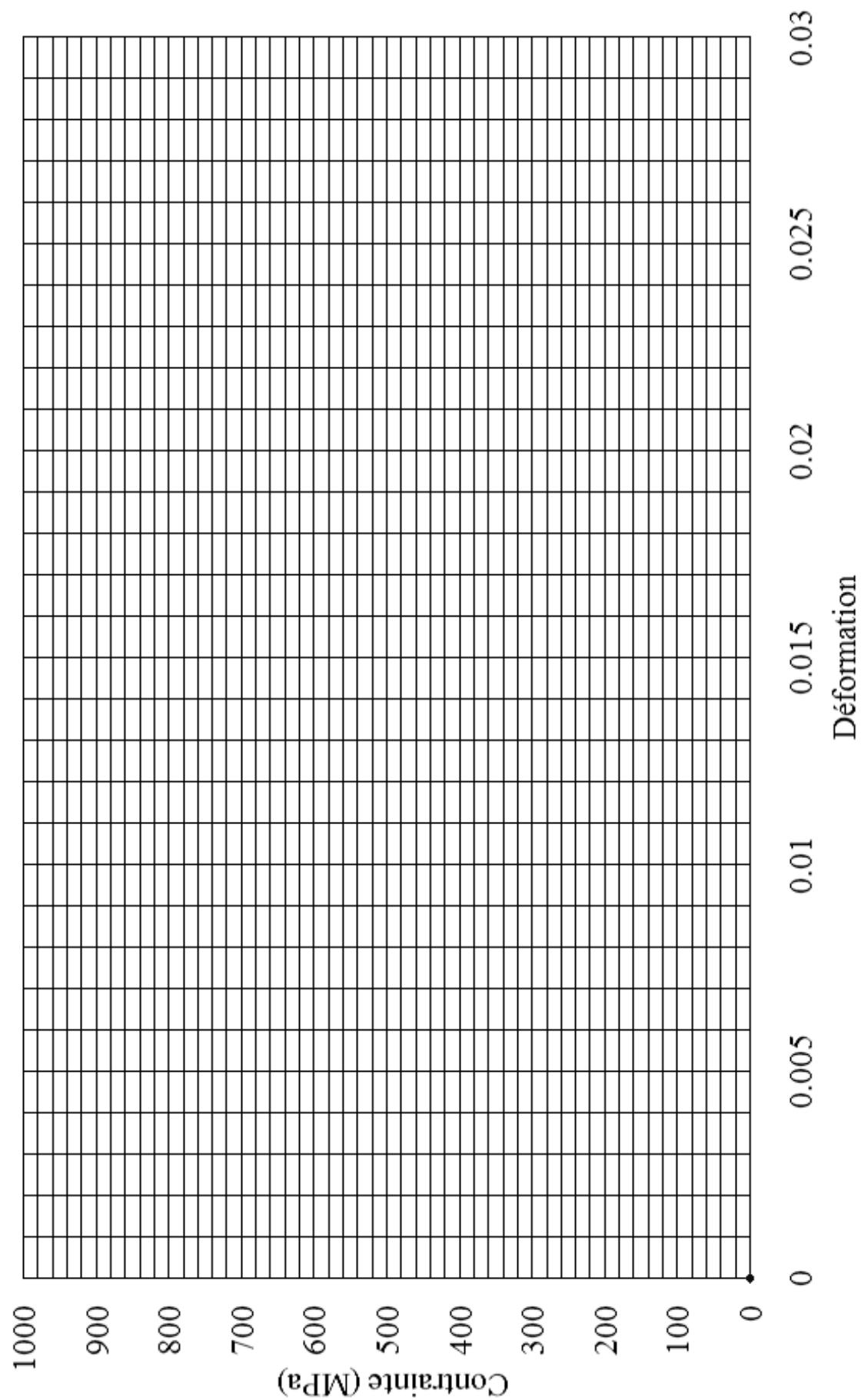
$$f < 0 \quad \text{élasticité}$$

$$f = 0 \quad \text{et} \quad df < 0 \quad \text{décharge élastique}$$

$$f = 0 \quad \text{et} \quad df = 0 \quad \text{écoulement plastique}$$

On se donne une loi d'évolution linéaire pour X : $dX = C.d\varepsilon_p$

- Sur la base des essais expérimentaux choisir des valeurs de R_e et C qui permettent de décrire raisonnablement les résultats expérimentaux jusqu'au point 7.
- Avec le modèle, on simule le chargement suivant : ($t=0$, $\sigma=0$), ($t=1s$, $\sigma=R_e$), ($t=1.2s$, $\sigma=1.2R_e$), ($t=3s$, $\sigma=0$), ($t=4s$, $\sigma=-R_e$). Calculer la déformation plastique en chaque point.



5 RUPTURE PAR FLUAGE

5.1 Introduction

Les machines modernes contiennent de plus en plus de composants métalliques susceptibles de travailler longtemps, à haute température et dans des environnements chimiques agressifs. On peut citer par exemples des pièces de réacteurs d'avion ou de moteur de voitures, des réacteurs chimiques, des composants de centrale thermique etc...

A haute température, il ne suffit plus de se placer en dessous de la limite d'élasticité pour éviter de provoquer l'apparition de déformations irréversibles, il faut en outre tenir compte du facteur temps, car les métaux deviennent visco-plastiques à haute température. En outre, il est observé que le matériau s'endommage au cours du temps ce qui conduit finalement à sa rupture par fluage.

Le fluage est un mode d'endommagement lent et progressif qui a conduit par le passé à plusieurs accidents industriels importants. L'accident le plus catastrophique s'est produit à Bhopal, Inde en décembre 1984 et a causé la mort de plus de trois mille personnes. Cet accident a été attribué à la rupture par fluage d'une tuyauterie transportant un fluide toxique sous pression et à haute température.

Le comportement visqueux des matières plastiques et le comportement visco-plastique des métaux a déjà été discuté aux chapitres §3.2 et §4.4.3, aussi ce chapitre est-il essentiellement centré sur la caractérisation, l'endommagement et la rupture par fluage des matériaux métalliques.

5.2 Résistance d'un matériau au fluage

5.2.1 Méthodes de caractérisation

Les essais de fluage sont assez simples à conduire dans leur principe. On suspend généralement un poids mort à une éprouvette cylindrique ou plate de section initiale S_0 . La déformation longitudinale de l'éprouvette est mesurée en fonction du temps. La température est fixée au cours de l'essai, qui dure généralement quelques semaines mais peut parfois atteindre des durées de plusieurs années. La partie la plus délicate de l'essai consiste à maintenir la température constante pendant toute la durée de l'essai.



Figure 73 : batterie de machines de fluage.

Au cours de l'essai la déformation longitudinale de l'éprouvette s'accroît et par conséquent sa section diminue. Dans la mesure où c'est en général un poids mort qui est utilisé pour le chargement, la contrainte appliquée n'est donc pas rigoureusement constante au cours de l'essai, mais augmente légèrement avec la déformation de fluage. C'est un fait qui est néanmoins généralement négligé par les expérimentateurs, chaque essai étant caractérisé par la valeur initiale de la contrainte $\sigma = F/S_0$.

5.2.2 Analyse d'un essai de fluage

Lors d'un essai de fluage, la contrainte est maintenue constante et on suit l'évolution de la déformation au cours du temps. On peut distinguer trois phases de fluage.

- *Le fluage primaire*, pendant lequel la vitesse de déformation plastique diminue, ce qui est lié à une augmentation de la contrainte d'écoulement du matériau (de l'écrouissage)
- *Le fluage secondaire*, au cours duquel la vitesse de déformation plastique reste constante. Si l'on réalise plusieurs essais de fluage, on peut reporter la vitesse de déformation de fluage secondaire en fonction de la contrainte de l'essai de fluage et identifier une loi de

$$\text{Norton pour le matériau : } \frac{d\varepsilon_p}{dt} = \frac{\langle \sigma - \sigma_o \rangle^m}{K}$$

- *Le fluage tertiaire*, au cours duquel la vitesse de déformation plastique augmente. Cette augmentation est associée à l'apparition d'un endommagement significatif du matériau. Cet endommagement peut consister en l'apparition de cavités de fluage dans le matériau ou à une localisation de la déformation plastique (analogue à une striction). A l'issue de cette phase d'endommagement, l'éprouvette se rompt. Pour une contrainte donnée la déformation ε_R et le temps à rupture t_R par fluage sont déterminés.

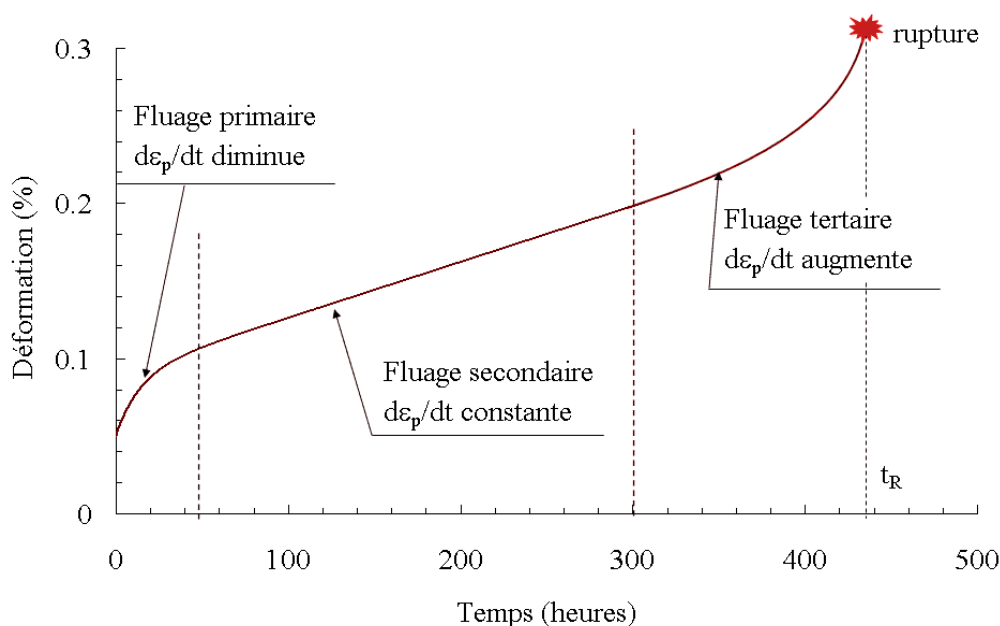


Figure 74 : Illustration, les trois phases d'un essai de fluage.

Lorsqu'on caractérise la résistance au fluage d'un matériau, de nombreux essais de fluage doivent être réalisés. Pour une température donnée, on déterminera les déformations et températures à rupture pour différents niveaux de contrainte. Les mêmes essais seront réalisés pour différentes températures. Ces essais permettent ensuite de tracer des abaques qui serviront d'aide au dimensionnement.

Sur les Figure 75 et Figure 76 sont tracées quelque unes de ces abaques. Elles permettent notamment de visualiser les progrès qui ont été faits en tenue en fluage des matériaux en adaptant le procédé de fabrication de ces alliages afin d'améliorer leur tenue au fluage.

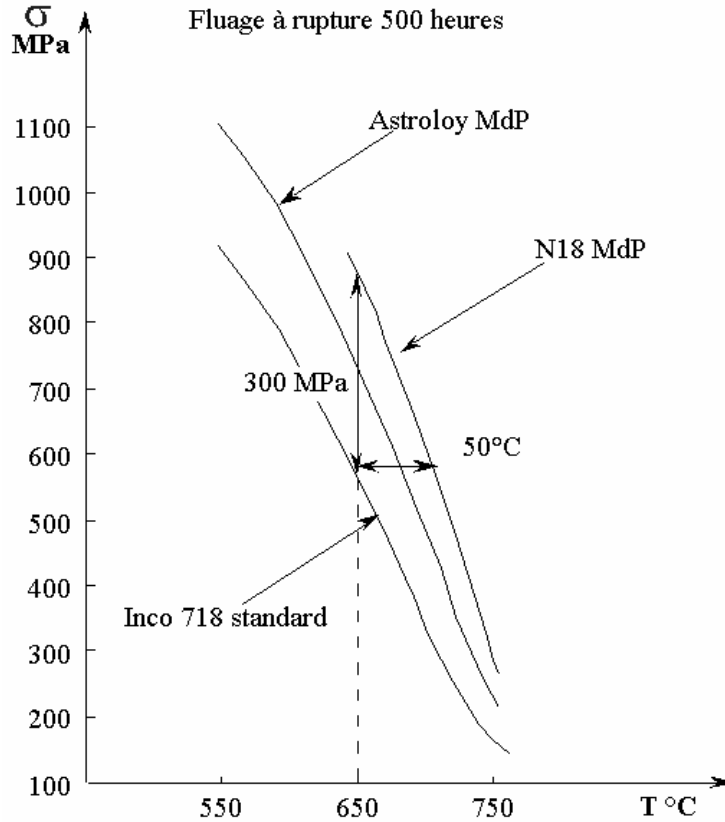


Figure 75 : Comparaison de la contrainte qui conduit à la rupture par fluage au bout de 500 heures en fonction de la température pour différents alliages aéronautiques. Deux superalliages réalisés par métallurgie des poudres, N18 et Astroloy MdP, et un superalliage forgé Inco 718 standard (Lautridou, 1989).

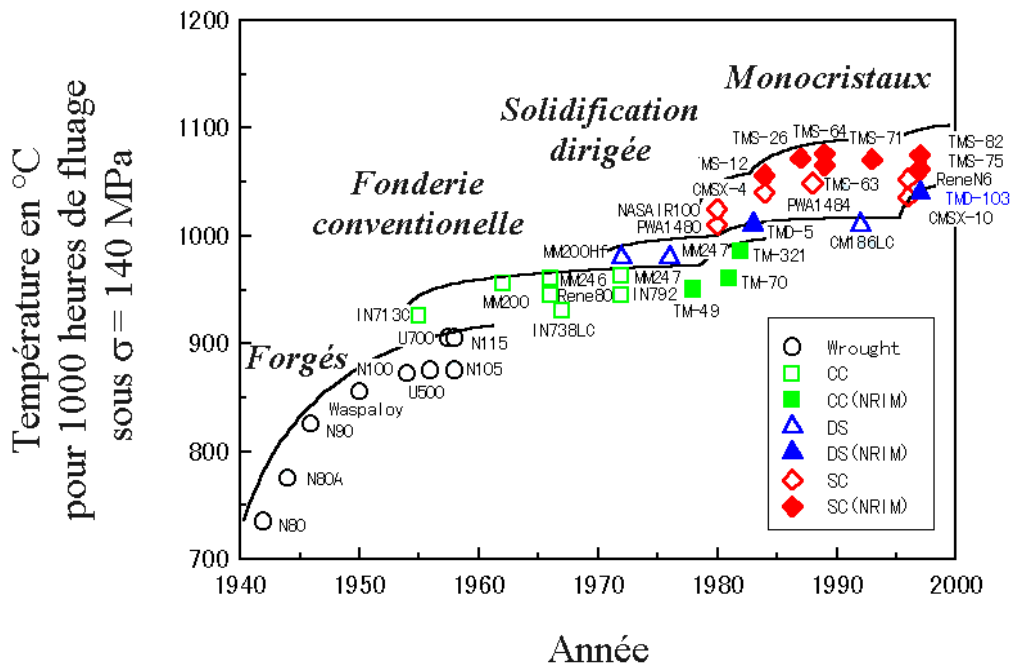


Figure 76 : Comparaison des températures pour lesquelles la rupture sous une contrainte de 140 MPa est obtenue au bout de 1000 heures pour différents alliages en fonction de l'époque à laquelle ces alliages ont été conçus et par type de procédé de fabrication (Wrought=Forgés, CC=fonderie conventionnelle, DS=solidification dirigée, SC=monocristaux).

5.2.3 Endommagement de fluage

Lors de la phase de fluage tertiaire, l'endommagement du matériau peut être observé. On parle d'endommagement lorsque de nouvelles surfaces sont créées dans la matière, cavités ou fissures. Plusieurs mécanismes permettent d'expliquer l'apparition d'endommagement de fluage à l'échelle microscopique dans le matériau. Dans tous les cas, ces cavités ou micro-fissures tendent à coalescer et à former de nombreuses fissures de taille supérieure. L'endommagement est assez diffus et s'accompagne de déformations plastiques importantes. Enfin, une fissure principale finit par se former et le matériau peut se déchirer ce qui conduit à la rupture (Figure 77).

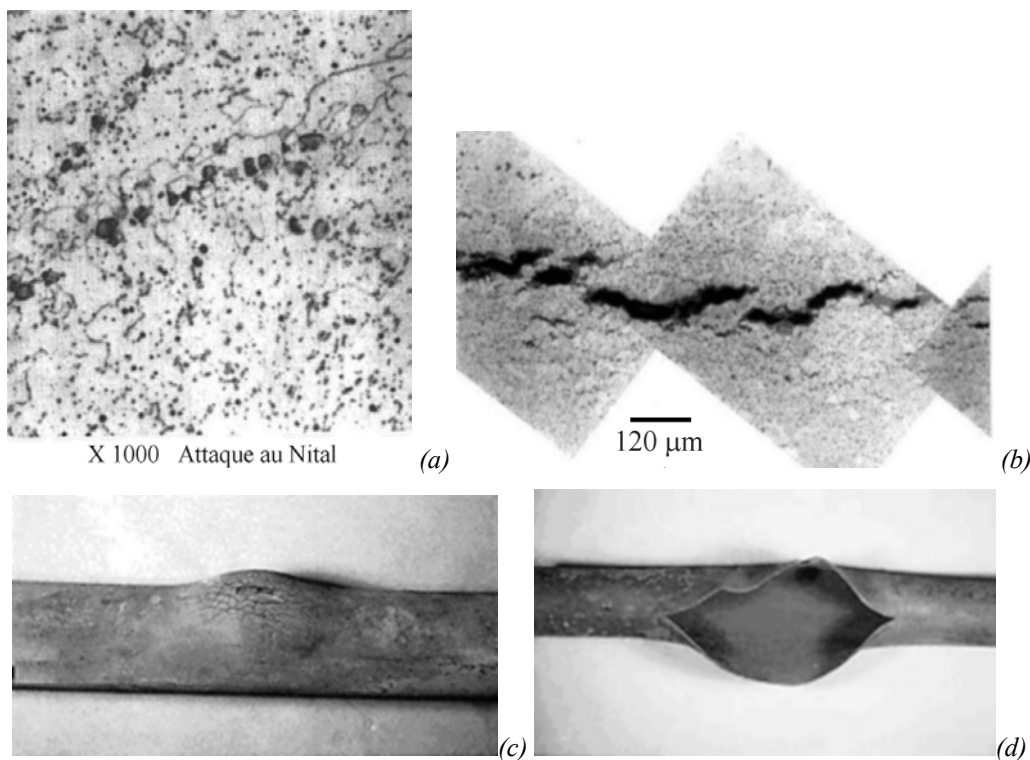


Figure 77 : rupture par fluage en quatre étapes. (a) apparition d'endommagement à l'échelle microscopique (M. Henry, 1997), (b) coalescence des cavités conduisant à la formation de micro-fissures à l'échelle mésoscopique (C. Westwood), (c) Endommagement et déformation de fluage localisée sur une tuyauterie (C. Westwood), déchirure de la tuyauterie par fluage (C. Westwood).

5.3 Mécanismes physiques d'endommagement par fluage

Selon la température et la vitesse de déformation, divers mécanismes peuvent être à l'origine de la déformation et de l'endommagement de fluage, à basse température ou forte vitesse de déformation, si l'on observe du fluage ce sera généralement un fluage associé au glissement de dislocations, lorsque la température augmente, la diffusion d'atomes en volume devient possible, d'abord près des joints de grains puis partout dans la matière. Dans tous les cas, il est rare que l'endommagement de fluage ne soit pas accompagné de phénomènes de corrosion ou d'oxydation en surface qui sont également plus actifs lorsque la température augmente et pour des temps longs.

5.3.1 Auto-diffusion, montée des dislocations.

Lorsque la température augmente, la contribution de l'autodiffusion devient non négligeable. A haute température, des lacunes (absence d'un atome dans le réseau cristallin) apparaissent depuis les surfaces libres du matériau. Si la température est très élevée ces lacunes sont susceptibles de se déplacer dans la matière en suivant le gradient de pression (des zones en surpression hydrostatique vers les zones en dépression hydrostatique) et également le gradient de concentration de lacunes (Figure 78 (a)).

Lorsque la température est plus faible cette auto-diffusion ne pourra se produire que dans les zones de concentration de contrainte, en particulier autour des dislocations et des joints de grains. Ainsi une lacune pourra se déplacer par auto-diffusion depuis les zones en compression des dislocations vers les zones en tension des dislocations, ce qui conduit à la montée de ces dislocations.

Or si une dislocation est bloquée par un obstacle, la montée peut permettre de « passer » au dessus de l'obstacle. Ainsi, à faible vitesse, sans contribution de la montée des dislocations, la contrainte d'écoulement peut être élevée tandis qu'à faible vitesse, la contribution de la montée permet de franchir plus facilement les obstacles, la contrainte d'écoulement est alors plus faible.

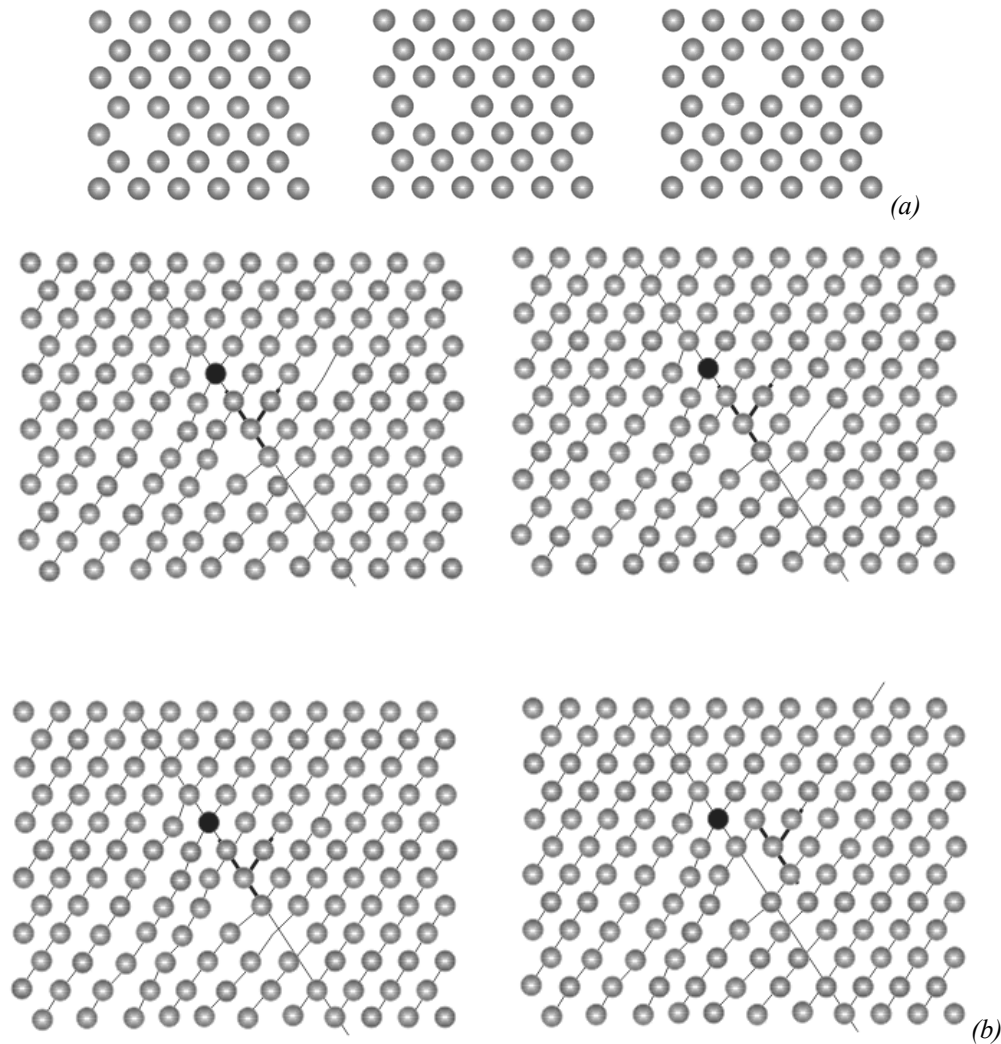


Figure 78 : illustrations (a) mouvement d'une lacune dans le réseau cristallin, (b) montée d'une dislocation sous l'effet de la diffusion d'une lacune. En Gris les atomes, en noir un obstacle, les plans cristallins sont représentés en coupe par un trait fin, la ligne de dislocation par un trait fort en arrière plan.

5.3.2 Fluage-dislocation

Lorsque les températures sont assez faibles ($T < 0.7 T_f$) ou les vitesses de déformation rapides, la déformation sous contrainte par auto-diffusion en volume ou aux joints de grain d'atomes est négligeable devant l'effet du glissement visqueux des dislocations (§4.4.3). On peut représenter le comportement visqueux du matériau par une loi de Norton. On parlera alors de régime de fluage-dislocations.

Dans ce régime, de l'endommagement est observé de manière assez diffuse le long des joints de grains et sur des obstacles, tels que des inclusions par exemple. En effet, lorsque les dislocations rencontrent une barrière infranchissable par montée, un joint de grain par exemple, elles s'empilent et conduisent alors à l'apparition d'une concentration de contrainte. Les lacunes diffusent au cours du temps vers ces concentrations de contraintes ce qui produit des cavités.

La rupture se produit alors par coalescence de ces cavités le long du joint de grain (découper selon le pointillé !). La rupture est intergranulaire. Sur les joints de grains rompus on peut éventuellement observer la trace des cavités qui ont coalescé.

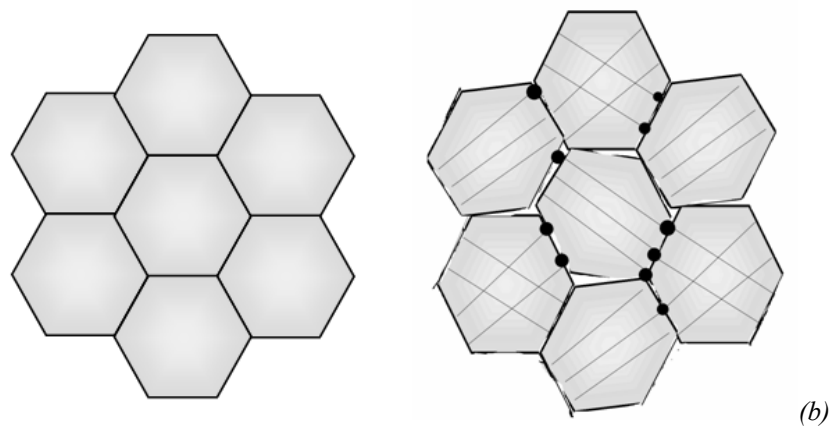
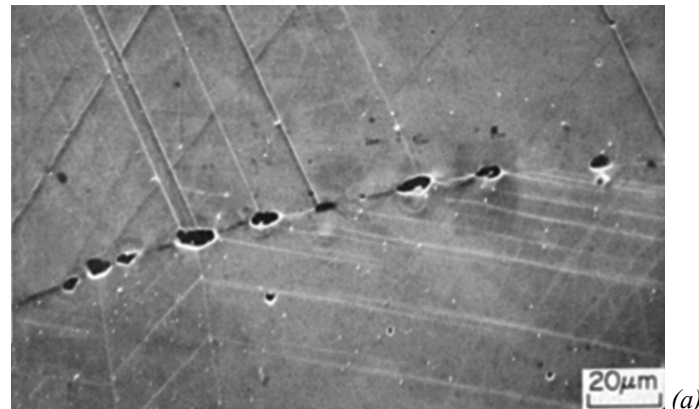


Figure 79 : Micro-mécanisme d'endommagement par fluage (a) cliché pris en microscopie optique (Badeshia) de la formation de cavités à l'intersection entre les plans de glissement des dislocations et un joint de grain. (b) illustration du mécanisme d'endommagement.

5.3.3 Fluage diffusion aux joints de grains

Ce mode d'endommagement se produit à des températures plus élevées, ou à des vitesses de déformation suffisamment faibles pour permettre à l'auto diffusion des atomes sous contrainte de se produire. L'auto-diffusion est très lente dans les solides et se produit préférentiellement le long des joints de grain où l'ordre cristallographique est le plus faible.

A l'échelle macroscopique on observe alors de la déformation, mais si l'on suit la déformation à l'échelle des grains, on constate que ces grains ne se déforment pas significativement mais glissent les uns par rapport aux autres (Figure 80). Ainsi se forment des cavités aux sommets des polygones constitués par les grains, aussi appelés points triples des joints de grains.

Il faut bien noter que dans ce cas, le matériau se déforme de manière irréversible mais avec changement de volume puisqu'on fait apparaître des trous dans la matière. C'est d'ailleurs une manière de caractériser l'évolution de l'endommagement lors des essais. Il est possible de mesurer à la fois la déformation longitudinale et la variation de section de l'éprouvette au cours de l'essai, ce qui permet de calculer l'évolution du volume de matière. Si la déformation de fluage se produit sans endommagement ce volume doit rester constant. En revanche le début de l'endommagement est à l'origine d'un changement de volume, correspondant à l'apparition de trous dans la matière.

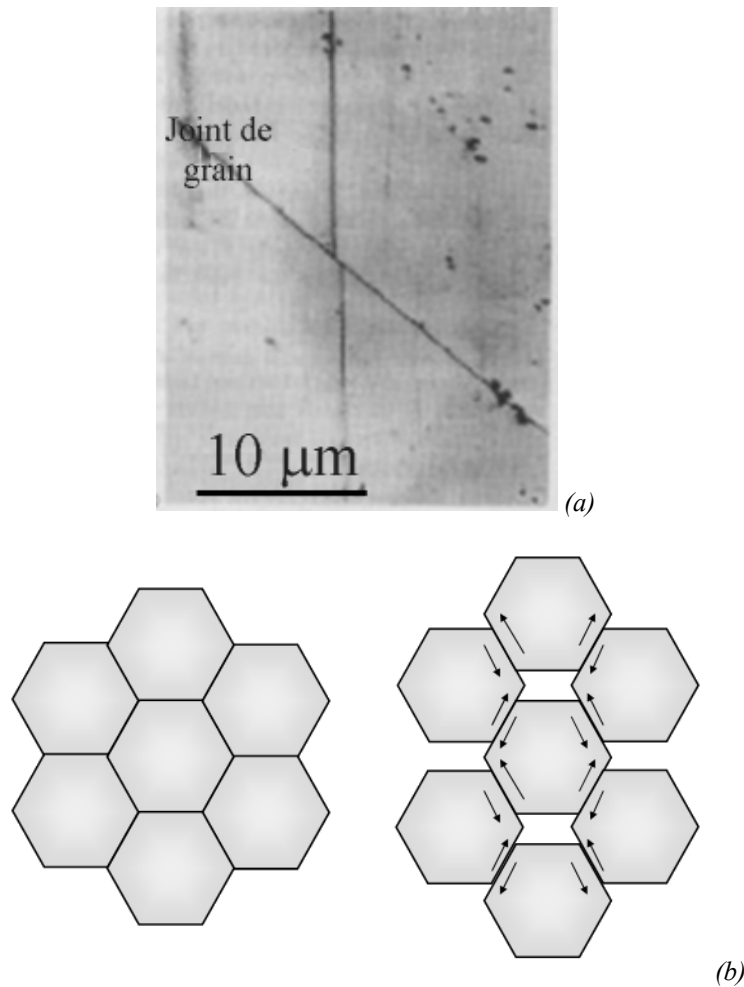


Figure 80 : Fluage par glissement intergranulaire (a) cliché en microscopie optique. Une ligne a été tracée avant essai à travers un joint de grain et est observée après essai. On observe un glissement localisé au joint de grain. (b) illustration du mécanisme de formation de cavités intergranulaires.

5.3.4 Fluage diffusion en volume

Enfin à très haute température, ($T > 0.8 T_f$) l'autodiffusion des atomes en volume est rapide et permet aux grains de se déformer sans mouvements de dislocations, plus ou moins comme un liquide. Alors l'endommagement reste faible.

Néanmoins, lorsque la vitesse de déformation augmente, même à très haute température, l'auto-diffusion peut ne pas être assez rapide pour accommoder la vitesse de déformation. D'autres mécanismes peuvent alors se mettre en place tels que la réorganisation des cristaux sous l'effet de la déformation appelée aussi recristallisation dynamique.

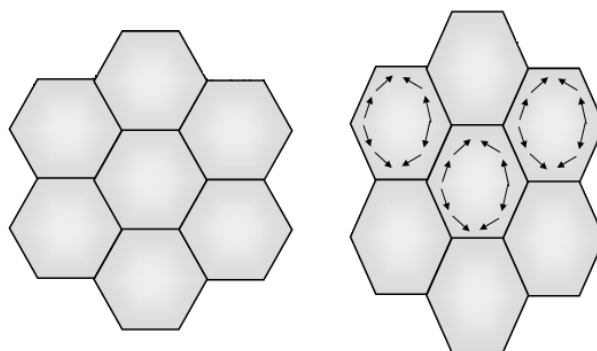


Figure 81 : déformation des grains par auto-diffusion d'atomes sous contrainte.

5.3.5 Effet de la taille des grains

On observe généralement une dépendance significative de la vitesse de déformation de fluage sous une contrainte donnée à la taille des grains. Plus la taille de grain augmente et plus la vitesse de déformation de fluage diminue. (Figure 82). Ceci s'explique simplement par le fait que la rupture par fluage est intergranulaire. L'endommagement est directement lié au changement de volume du matériau lors de la déformation. Tandis que la rupture se produit par coalescence le long des joints de grains et est donc liée à la surface des grains. Le rapport surface sur volume des grains est inversement proportionnel à la taille des grains, ce qui explique pourquoi la résistance au fluage augmente lorsque la taille de grain augmente.

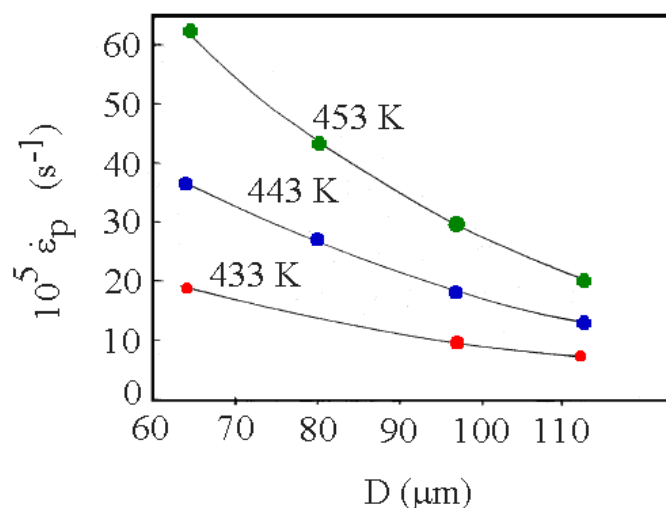


Figure 82 : Effet de la taille de grain D sur la vitesse de déformation de fluage sous une contrainte de 11 MPa et pour diverses températures. Alliage de Sn et 1% en masse de Zn, (G.S. Al Genainy)

Cet effet peut poser problème car on demande généralement à un matériau de présenter à la fois une haute limite d'élasticité et une bonne résistance au fluage. Or la résistance au fluage augmente si la taille de grain augmente tandis que la limite d'élasticité diminue lorsque la taille de grain augmente. Nous verrons par la suite quelles solutions ont été trouvées dans deux cas concrets.

5.3.6 Cartes de mécanismes d'endommagement

Finalement on peut pour un matériau établir une carte de mécanismes de déformation en fonction de la vitesse de déformation et de la température. Ces cartes ont été établies pour la plupart des métaux purs, et pour certains alliages industriels travaillant à haute température.

Sur la Figure 83 est présentée une carte de mécanismes de déformation. Il s'agit du cas du nickel pur avec une taille de grains de 0.1 mm. La contrainte d'écoulement est tracée en fonction de la température pour chaque vitesse de déformation. Des domaines sont distingués selon le mécanisme de déformation qui domine.

La contrainte « théorique » sur ce graphique est la contrainte d'écoulement que l'on pourrait atteindre, pour un nickel pur monocristallin et ne contenant aucun défaut cristallographique, aucune dislocation. On note bien que dans tous les cas, la contrainte réelle d'écoulement est bien inférieure à cette contrainte théorique.

À basse température on observe que la contrainte d'écoulement ne dépend presque pas de la vitesse de déformation, les courbes à 1 s^{-1} et 10^{-10} s^{-1} sont quasiment confondues. On pourra donc considérer que le comportement du matériau est essentiellement élasto-plastique. C'est le domaine de la plasticité.

Lorsque la température augmente, le comportement devient sensible à la vitesse, les courbes à 1 s^{-1} et 10^{-10} s^{-1} s'écartent significativement. A vitesse de déformation élevée se trouve le domaine de fluage-dislocations.

Lorsque les vitesses de déformation sont plus faibles, l'autodiffusion en volume ou aux joints de grain peut contribuer significativement à la déformation. C'est le domaine de fluage-diffusion, en volume pour les températures élevées et aux joints de grain lorsque les températures diminuent.

Pour les températures élevées mais à forte vitesse de déformation se détache en grisé le domaine de la recristallisation dynamique, qui implique à la fois des mouvements de dislocations, de joints de grains et de l'autodiffusion en volume.

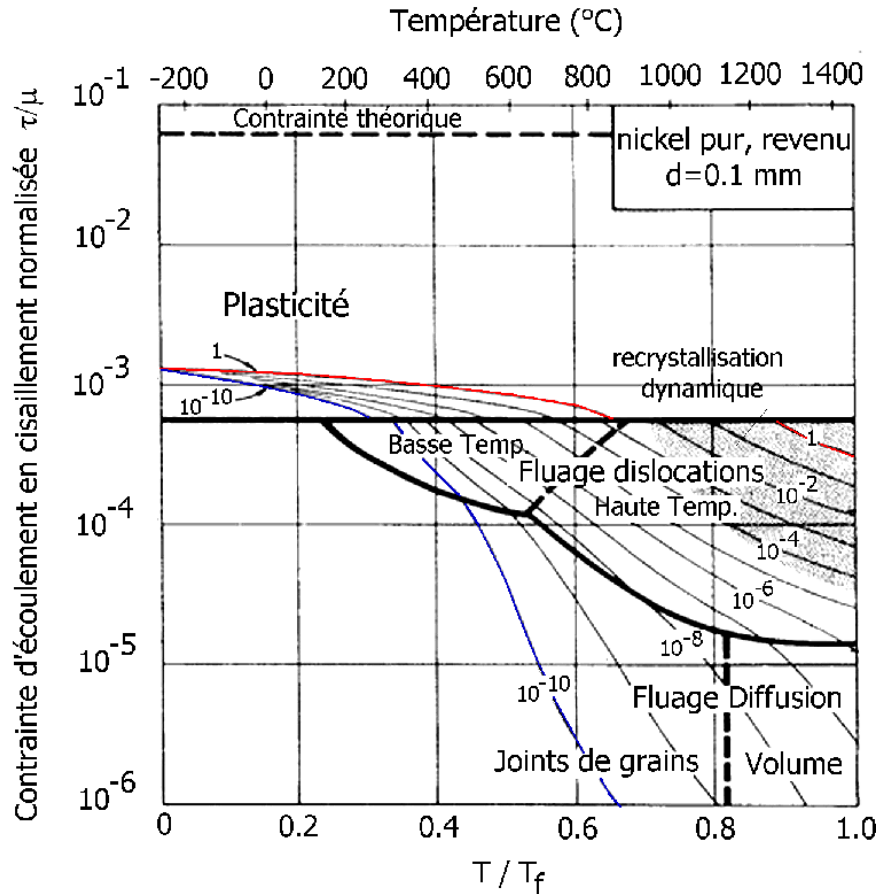


Figure 83 : Carte de mécanismes de déformation pour le nickel pur avec une taille de grain de 0.1 mm (d'après H.J. Frost et M.J. Ashby). La zone en grisé correspond au domaine où se produit de la recristallisation dynamique.

5.4 Etudes de cas

5.4.1 Introduction

Un moteur d'avion civil, à double flux, est constitué de deux parties principales, une partie propulsion (le disque FAN, analogue à l'hélice) et une partie motorisation (le réacteur) qui permet de faire tourner le disque FAN. Ainsi, le flux d'air se divise en deux flux, le flux froid qui passe par l'hélice et le flux chaud qui s'engouffre dans le réacteur.

Ce second flux est d'abord comprimé par une série de compresseurs rotatifs et atteint une pression de l'ordre de 25 Atm (2.5 MPa). Tout naturellement l'air ainsi comprimé s'échauffe et atteint une température de 800°C à 1200°C lorsqu'il entre dans la chambre de combustion. L'air chaud et sous pression rencontre alors le kérosène, le mélange s'enflamme et se dilate instantanément, les gaz chauds sortent à toute vitesse du réacteur et peuvent être employés pour propulser l'avion par réaction. Mais avant cela, ils sont d'abord utilisés pour faire tourner la turbine HP (haute pression) qui est montée sur le même arbre que le compresseur. Puis dans un moteur civil, les gaz sortants sont encore requis pour faire

tourner la turbine BP (basse pression) qui est montée cette fois sur le même arbre que le disque FAN. Les deux arbres sont coaxiaux. Finalement, quasiment toute la poussée provenant de la combustion est récupérée pour faire tourner l'hélice (FAN).

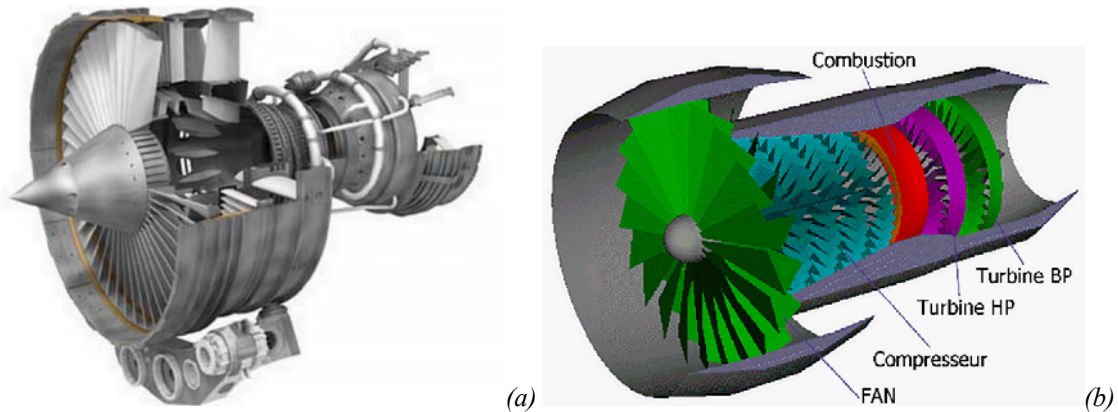


Figure 84 : illustration, (a) éclaté d'un moteur double flux, (b) schéma de principe

La turbine HP subit donc des températures et des pressions très élevées puisqu'elle se trouve juste à la sortie de la chambre de combustion. En outre l'environnement chimique est assez agressif. Enfin, les moteurs civils sont tenus de fonctionner longtemps sans défaillance. Cette turbine est donc particulièrement soumise aux problèmes de fluage.

Cette turbine est constituée de deux parties, les ailettes ou aubes, qui sont directement plongées dans les gaz de combustion et le disque sur lequel sont montées les ailettes. La température des aubes est beaucoup plus élevée que celle du disque mais elles peuvent être changées, leur durée de vie peut être plus courte. En outre leur rupture ne cause pas la perte de l'avion. La température des disques est plus faible, mais ils sont plus difficiles à changer et leur rupture pourrait causer la perte de l'avion, leur durée de vie doit donc être beaucoup plus grande.

5.4.2 Evolution de la microstructure d'une aube de turbine.

Les aubes de turbines subissent donc de très fortes températures pendant des temps long dans un environnement chimique assez oxydant. En outre les contraintes subies sont élevées mais essentiellement uniaxiales (selon l'axe de l'aube). Les aubes sont refroidies par une circulation d'air froid à l'intérieur de l'aube qui est creuse. Malgré tout la température de fonctionnement peut atteindre $0.7 T_f$, T_f étant la température de fusion de l'alliage.

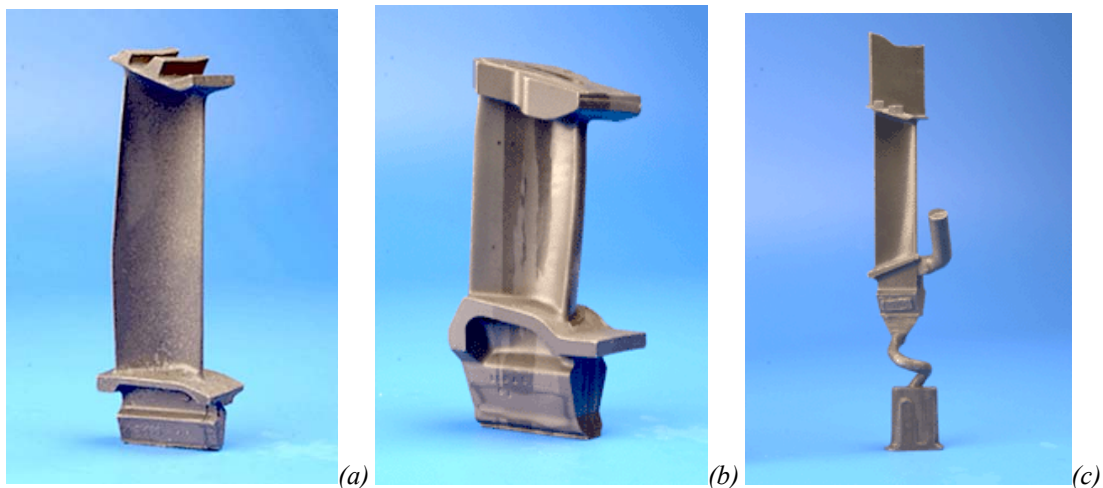


Figure 85 : (a) aube polycristalline à gros grains. (b) aube polycristalline réalisée par fonderie avec solidification dirigée, du bas de l'aube vers le haut. (c) aube monocristalline, dont la « queue de cochon » ou sélecteur d'orientation n'a pas encore été usinée.

Le fluage est donc un problème crucial pour ces pièces. Comme l'endommagement de fluage se produit essentiellement le long des joints de grain, la première solution envisagée a été de produire des

aubes à très gros grains. Les grains se voient alors sans difficulté à l'œil (1 à 5 mm). La seconde solution a été de supprimer les joints de grains perpendiculaires à la contrainte axiale. Ceci a pu être mis en œuvre en fabriquant l'aube par fonderie à solidification dirigée. Les joints de grains restaient néanmoins des zones de faiblesse. Les aubes les plus récentes sont donc monocristallines. Elles sont également réalisées par solidification dirigée mais un grain unique est sélectionné à l'aide d'une « queue de cochon » avant que le front de solidification n'entre dans l'aube.

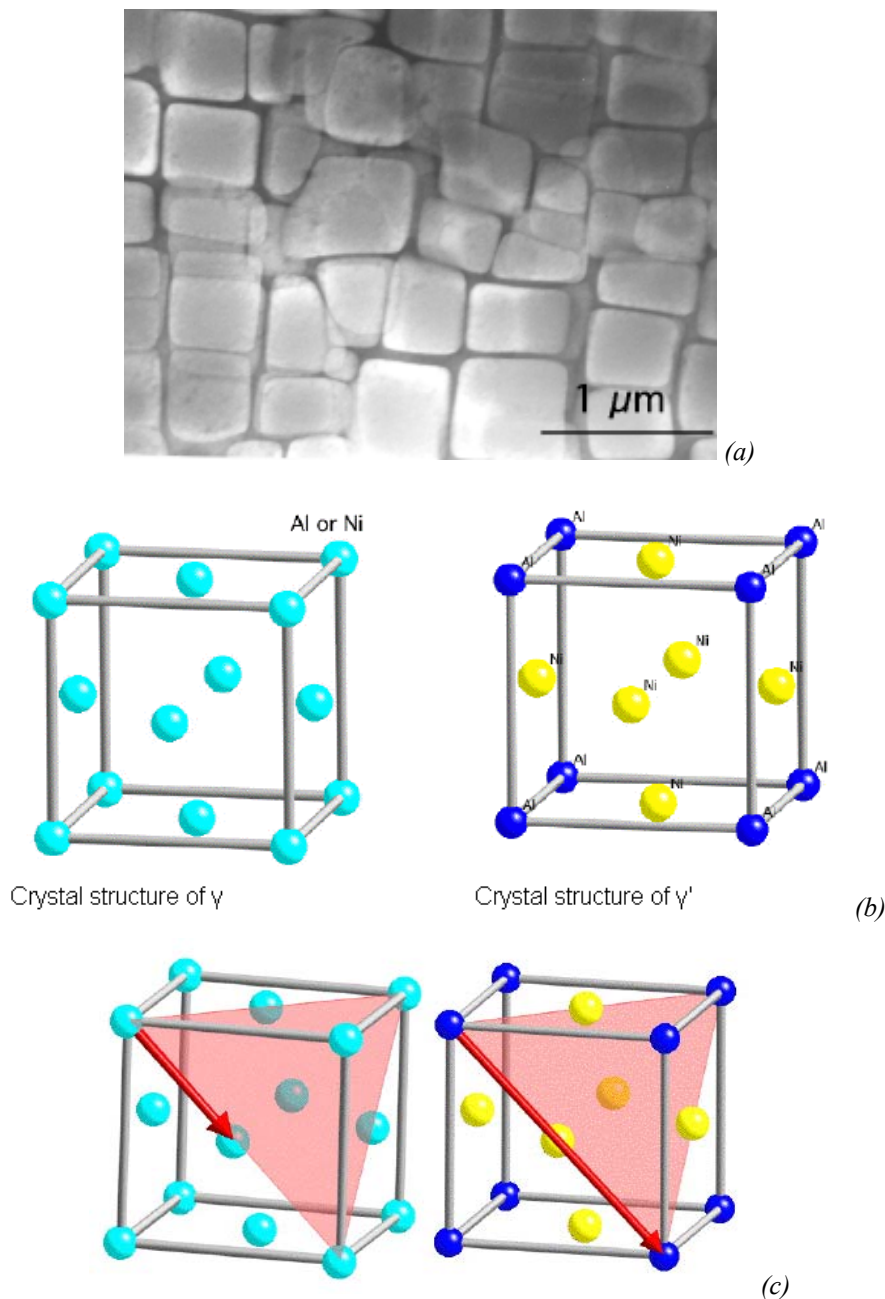


Figure 86 : (a) Microstructure d'un superalliage pour aube de turbine Ni-9.7Al-1.7Ti-17.1Cr-6.3Co-2.3W at%. Cliché de microscopie électronique à transmission, montrant une fraction volumique importante de précipités cuboïdaux de phase γ' dans une matrice γ , Hillier, thèse de doctorat, Université de Cambridge, 1984, (b) structures de phases γ et γ' , (c) plan et direction de glissement des dislocations dans la phase γ et dans la phase γ' (H. K. D. H. Bhadeshia www.msm.cam.ac.uk/.../Superalloys).

Les aubes monocristallines sont donc beaucoup moins susceptibles de s'endommager par fluage, néanmoins elles peuvent se déformer par fluage au cours du temps. Il est donc nécessaire de limiter au maximum le mouvement des dislocations dans le matériau, d'autant plus que le monocristal ne possède pas de joint de grains pour bloquer les dislocations. Pour maintenir une contrainte d'écoulement élevée dans le matériau même à très haute température et en l'absence de joints de grains, on travaille sur la composition de l'alliage.

En premier lieu, le métal de base est choisi notamment pour sa haute température de fusion. La plupart des alliages métalliques travaillant à très haute température sont ainsi des alliages à base de Nickel.

En second lieu, des éléments d'addition (Al et ou Ti) sont ajoutés afin de permettre une précipitation de seconde phase dans la matrice de métal de base. Cette précipitation joue le rôle d'obstacle au mouvement des dislocations. Ainsi les superalliages pour aubes de turbine sont ils constitués d'une matrice γ de nickel, cubique à face centrée, et d'une précipitation de phase ordonnée γ' (Figure 86 b). L'intérêt de ce type d'alliage est que le titane et l'aluminium restent en solution solide dans le nickel au cours de la phase de solidification lors de la réalisation par fonderie de l'aube. On évite les phénomènes de ségrégation lors de la solidification. Ensuite la solution solide s'ordonne pour former des précipités γ' lors de traitement thermiques ultérieurs dont la durée est assez importante et la température juste au dessus de la température d'usage. Les précipités ordonnés sont un obstacle au mouvement des dislocations (Figure 86 c) ce qui permet de conserver une contrainte d'écoulement élevée pour le matériau même à haute température.

Enfin, l'environnement chimique très oxydant de l'aube a conduit à ajouter d'autres éléments d'alliages tels que le chrome par exemple qui reste en solution solide dans la matrice de nickel et forme une couche d'oxyde de chrome en surface qui permet de protéger le cœur de l'aube de son environnement. Des revêtements peuvent aussi être déposés sur l'aube pour la protéger.

5.4.3 Superalliage N18 pour disques de turbine.

Les disques de turbine ne sont pas directement en contact avec les gaz de combustion, leur température de fonctionnement est plus faible (entre 400°C à l'axe et 650°C au niveau de la jante) et leur environnement chimique moins agressif. En revanche, leur durée de vie doit être beaucoup plus élevée et la rupture ne doit pas se produire en fonctionnement. Les contraintes qu'ils subissent sont beaucoup plus importantes que celle subies par les aubes, du fait de leur géométrie cylindrique d'une part et du gradient de température d'autre part. En outre, du fait de la géométrie des disques, les contraintes dans le disque sont multiaxiales.

Le fluage reste un problème important dans ces pièces mais un compromis devra être trouvé entre l'exigence d'une bonne résistance au fluage et d'une contrainte d'écoulement très élevée à haute température.

Pour cela, on emploie toujours des alliages à base de nickel, plus titane et aluminium afin de faire précipiter la phase durcissante γ' . On ajoute également du chrome pour la résistance à l'oxydation.

Cependant, il est aussi nécessaire de maintenir une faible taille de grains (10 à 50 μm) afin d'avoir une contrainte d'écoulement élevée, tout en limitant le fluage aux joints de grains.

Pour cela, la plupart des superalliages présentent au minimum une précipitation bimodale de phase γ' et des carbures intergranulaires.

La phase γ' est distribuée sous forme d'une part de très gros précipités aux sommets des polygones constitués par les grains (ou points triples), dont le rôle est d'éviter le grossissement des grains lors de la mise en œuvre de l'alliage et d'éviter le glissement intergranulaire par fluage (Figure 87 (a) A).

D'autre part, on trouve aussi des précipités γ' plus fin à l'intérieur des grains pour bloquer les mouvements des dislocations (Figure 87 (a) B).. Pour certains alliages, comme celui du disque de turbine du moteur de l'avion rafale, la précipitation de phase γ' intragranulaire est elle-même bimodale afin de limiter le mouvement des dislocations à différentes vitesses de déformation (Figure 87 (c)).

Par ailleurs, l'alliage est chargé en carbone afin de créer une précipitation de carbures aux joints de grains, permettant également de limiter de glissement intergranulaire par fluage (Figure 87 (b)).

Finalement la composition chimique de ces alliages est extrêmement compliquée, par exemple dans le cas du N18 (alliage du disque de turbine du moteur de l'avion rafale) la composition est la suivante :

Composition chimique en % volumiques .

C	Co	Ni	Cr	Mo	Al	Ti	B	Hf	Zr
0,015	15,7	base	11,5	5,5	4,35	4,35	0,015	0,45	0,03

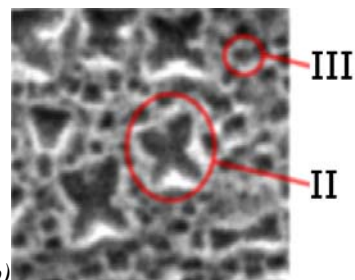
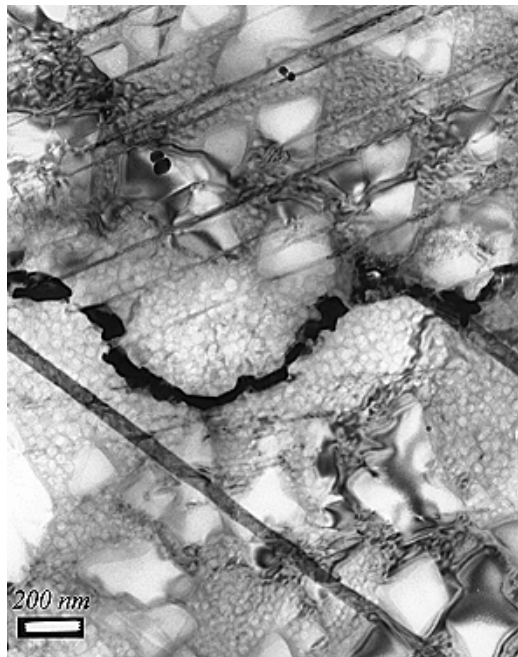
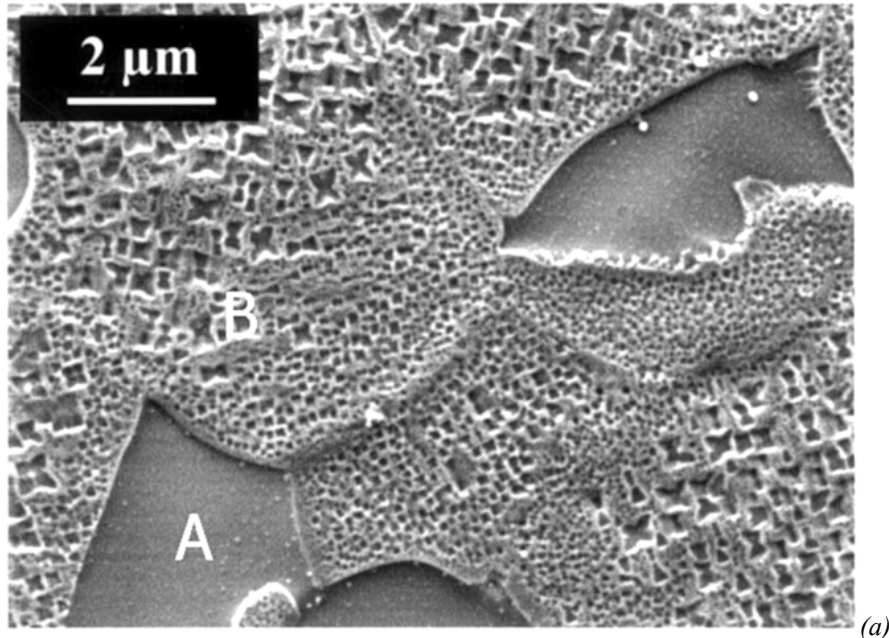


Figure 87 : (a) cliché de microscopie à balayage de l'alliage N18 (disque de turbine du rafale), noter la faible taille de grains 5 à 15 mm, **A** les précipités γ' aux points triples des joints de grains, **B** la précipitation fine de γ' à l'intérieur des grains. (b) même matériau, noter le cisaillement des précipités par les dislocations, et la précipitation de carbures (noirs) aux joints de grains (c) détail, la précipitation fine de phase γ' intragranulaire est également bimodale précipités γ' très fins (ou γ' III) et précipité γ' moins fins noté γ' II, afin de limiter le mouvement des dislocations aux vitesses lentes et rapides.

La difficulté réside dans le procédé de fabrication de cet alliage. Ces alliages, du fait même de leur conception, sont difficiles à forger. On peut partir d'une solution fonderie suivi d'une forge, mais compte

tenu de l'épaisseur des disques, les vitesses de refroidissement sont lentes ce qui conduit à des ségrégations et au grossissement du grain lors du refroidissement.

La solution retenue est donc la métallurgie des poudres. Des poudres fines sont réalisées à partir du métal liquide, ce qui garantit des vitesses de refroidissement rapides et donc une composition chimique homogène. L'opération est réalisée sous gaz neutres afin que les poudres restent réactives.

Ensuite, les poudres sont compactées à chaud sous pression et température, sans repasser à l'état liquide. Cette phase permet la densification du matériau et la précipitation des gros γ' aux joints de grains, qui limitent le grossissement des grains lors de la mise en œuvre et le fluage lors de l'usage. La densification et la qualité du matériau est encore améliorée en procédant à des opérations de forge.

Enfin deux traitements thermiques successifs sont appliqués, comprenant chacun un maintien de la température pendant une dizaine d'heures suivi d'une trempe, le premier à une température supérieure au second. Le premier permet de faire précipiter la phase γ' intragranulaire γ'_{II} et le second la phase γ' intergranulaire très fine γ'_{III} .

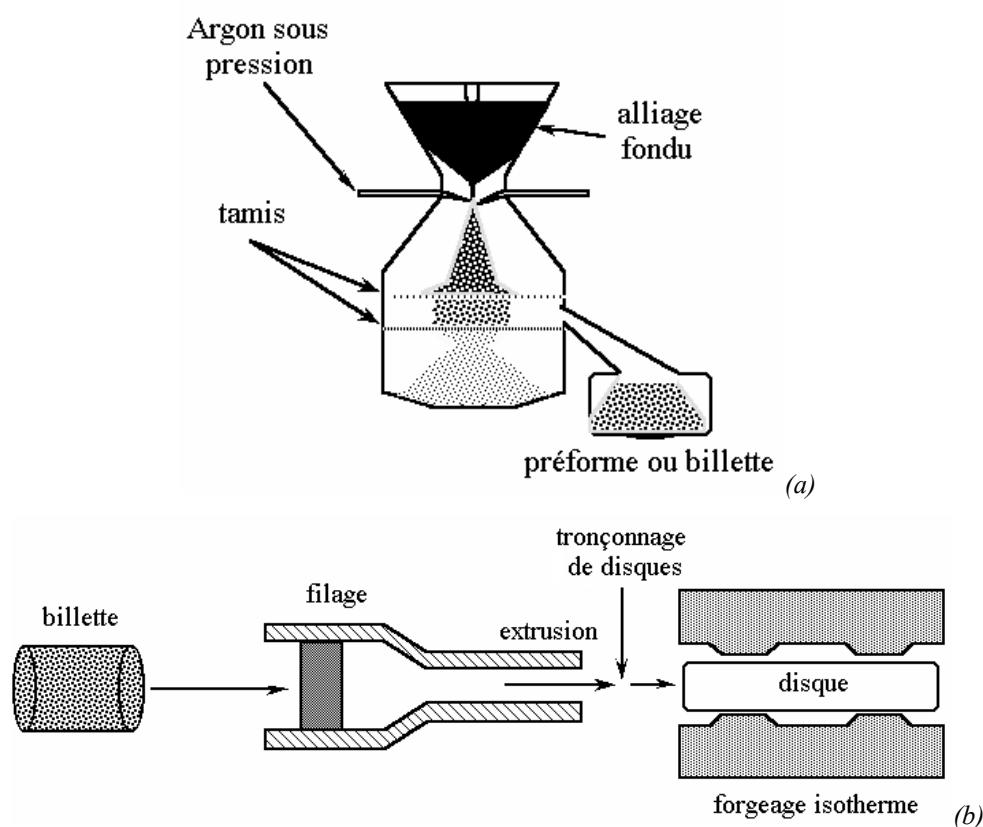


Figure 88 : alliage MdP, métallurgie des poudres, (a) fabrication des poudres et tri sous gaz neutre, (b) densification du matériau par filage à chaud puis forgeage isotherme.

Ce procédé complexe permet d'atteindre 500h de fluage à 650°C sous une contrainte de 900 MPa tandis qu'avec un superalliage classique (sans MdP) la contrainte n'est que de 600 MPa (Figure 75).

5.5 Résumé.

◇ *Essai de fluage*

- Le fluage consiste en une déformation progressive au cours du temps et sous contrainte constante.
- Fluage primaire, la vitesse de déformation est décroissante.
- Fluage secondaire, la vitesse de déformation est constante
- Fluage tertiaire la vitesse de déformation est croissante.

◇ *Mécanismes d'endommagement, cas des métaux*

- Fluage dislocation : déformation par glissement et montée de dislocations, endommagement par diffusion de lacunes et formation de cavités aux joints de grains. Basse température ou forte vitesse de déformation.
- Fluage diffusion aux joints : déformation par glissement relatif des joints de grains, endommagement par formation de cavités aux points triples des joints de grains. Température et vitesse de déformation moyennes.
- Fluage diffusion en volume : déformation par auto-diffusion sous contrainte en volume, peu d'endommagement. Températures élevées, faible vitesse de déformation.

◇ *Paramètres influents*

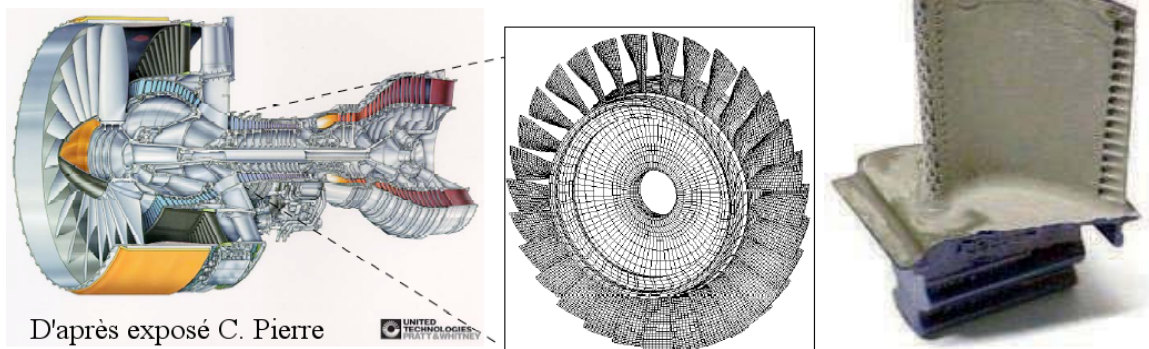
- La vitesse de déformation augmente si la température augmente.
- L'endommagement diminue si la taille de grain augmente.

5.6 Problèmes

5.6.1 Fatigue thermique d'une aube de turbine

Les aubes de turbine à gaz des centrales thermiques de production d'électricité ou de turbo-propulseurs d'avion sont soumises à un environnement agressif et à des températures élevées. Elles sont protégées par un revêtement de céramique inerte chimiquement et qui joue le rôle de barrière thermique.

La durée de vie de ces aubes est déterminée par le nombre d'arrêts et de démarrages de la centrale plus que par le nombre d'heures de fonctionnement. Les rampes de puissance lors de pics de consommation sont aussi très dommageables. L'endommagement prépondérant est dû à la fatigue thermo-mécanique de l'aube, qu'on se propose d'étudier ici.



D'après exposé C. Pierre

UNITED TECHNOLOGIES
PRATT & WHITNEY

◇ *Question 1. Quel rôle joue le revêtement vis à vis de la fatigue thermique ?*

On assimile la forme de l'aube à un parallélogramme rectangle de largeur 20 mm et de hauteur 150 mm recouvert d'une couche de revêtement d'épaisseur régulière 7 mm. On se propose de travailler en 1D.

◇ *Question 2 : Evolution des contraintes au cours d'un cycle marche-arrêt*

Le matériau de l'aube est un superalliage à base nickel IN738, dont la loi de comportement présente un écrouissage isotrope linéaire $R=C.\epsilon_p$ et dont les propriétés sont les suivantes :

- Module de Young $Y_1 = 180 \text{ GPa}$
- Limite d'élasticité $\sigma_y = 350 \text{ MPa}$
- Constante d'écrouissage $C=15 \text{ GPa}$
- Coefficient de dilatation $\alpha_1=13.10^{-6} \text{ K}^{-1}$

Le revêtement est une céramique frittée élastique dont les propriétés sont les suivantes :

- Module de Young $Y_2 = 250 \text{ GPa}$
- Coefficient de dilatation $\alpha_2=5.10^{-6} \text{ K}^{-1}$

On suppose que le revêtement adhère parfaitement à l'aube.

La température de fonctionnement de l'aube revêtue est de 600°C et la température ambiante 20°C . On suppose, pour simplifier, que ces propriétés ne dépendent pas de la température. Cependant, on tiendra quand même compte du fait que la limite d'élasticité diminue avec la température en considérant que le matériau reste élastique lors de son refroidissement.

- Proposez un modèle rhéologique pour l'aube revêtue. Ecrire les équations d'équilibre et de compatibilité des déformations.

- Calculez la température à partir de laquelle l'IN738 entre en plasticité.
- Calculez la déformation de l'aube revêtue lorsque $\Delta\theta=580^\circ\text{C}$. Discutez du jeu à prévoir entre les aubes et le carter.

◇ *Question 3 : Contraintes résiduelles*

- Après refroidissement de l'aube revêtue, calculez les valeurs des contraintes et des déformations résiduelles dans l'aube et dans le revêtement.
- Calculez la déformation permanente de l'aube revêtue.
- Comment évolue le jeu entre le carter et les aubes au cours des cycles marche-arrêt ? quel paramètre matériau contrôle son évolution ?

◇ *Question 4 : Prise en compte de la viscoplasticité*

A 600°C , le métal est viscoplastique et suit une loi de Norton sans seuil :

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \left(\frac{\sigma}{K} \right)^n \text{ avec, } K=30 \text{ GPa et } n=4$$

- Calculez l'évolution des contraintes en fonction du temps lors d'un essai de relaxation conduit à 600°C , à partir d'une contrainte de 359 MPa. Sachant que la mise en température de la turbine dure environ 30 minutes, justifier les hypothèses choisies pour la montée en température.
- Calculez l'évolution des contraintes lors d'un maintien de la turbine à 600°C . Comparez les deux résultats.
- Calculez les contraintes et les déformations dans l'aube et le revêtement après 10 jours de fonctionnement sans interruption.
- Calculez la déformation de l'aube revêtue et l'évolution du jeu entre l'aube et le carter après 10 jours de fonctionnement.
- Discutez le nouvel état de contraintes et de déformations résiduelles après refroidissement. Pouvez vous dire si le jeu tend vers un état stabilisé ou s'il continue d'augmenter au cours des cycles suivants ?

6 RUPTURE PAR FATIGUE

6.1 Introduction

La fatigue est un mode de rupture différé qui se produit lorsque le matériau est soumis à des chargements cycliques, et cela même pour des contraintes bien inférieures à sa limite d'élasticité et des températures faibles. Ce mode d'endommagement limite la durée de vie des composants de la plupart des machines et des installations industrielles.

Il existe trois domaines principaux pour les mécanismes de rupture par fatigue, qu'on distingue sur une courbe de Wöhler (voir Figure 89), le domaine de la fatigue oligocyclique (à faible nombre de cycles), le domaine de la fatigue à grand nombre de cycles et le domaine de l'endurance. On verra qu'à chaque domaine est associée une méthode de calcul de la durée de vie.

6.2 Essais de fatigue conventionnels

6.2.1 Courbes de Wöhler, courbes S-N

Les essais de fatigue conventionnels, pratiqués depuis la fin du 19^{ème} siècle, consistent à soumettre une éprouvette de traction-compression ou de flexion à des cycles de contrainte. La sollicitation de fatigue est caractérisée par l'amplitude de contrainte du cycle de fatigue ($\Delta\sigma$) et par le rapport de charge ($R=\sigma_{min}/\sigma_{max}$). On mesure le nombre de cycles à rupture N pour chaque type de sollicitation ($\Delta\sigma, R$). On trace alors les courbes dites S-N qui donnent la demi-amplitude de contrainte $\sigma_a=\Delta\sigma/2$ en fonction du nombre de cycles à rupture N pour divers rapport de charge.

Les courbes dites de Wöhler, donnent le nombre de cycles à rupture en fonction de la demi-amplitude $\sigma_a=\Delta\sigma/2$ de contrainte, pour un rapport de charge $R=-1$.

La première observation que l'on peut faire sur une courbe de Wöhler, est que les durées de vie en fatigue pour une amplitude de contrainte donnée sont distribuées statistiquement. L'origine principale de cette variabilité des durées de vie est l'existence de défauts dans le matériau qui conduisent à l'amorçage et la propagation de fissures. Leurs tailles, formes et positions étant variables, la durée de vie de la pièce est aussi variable. Aussi, un dimensionnement, à partir des courbes de Wöhler, prévoit-il une durée de vie N avec une probabilité de rupture associée $P(N)$. La dispersion des durées de vie augmente lorsque la durée de vie moyenne augmente. Ceci limite l'applicabilité des courbes de Wöhler pour le dimensionnement des organes de sécurité des structures. Pour les autres composants, il est important de bien maîtriser l'origine de la variabilité des durées de vie pour prévoir le risque de rupture du composant, associé à la durée de vie calculée, à partir des données collectées sur éprouvettes.

On distingue trois domaines sur une courbe de Wöhler, le domaine de la fatigue oligo-cyclique (ou fatigue plastique), le domaine de la fatigue à grand nombre de cycles et le domaine de l'endurance.

La durée de vie la plus courte possible sur la courbe de Wöhler est égale à $1/4$ de cycle et est obtenue lorsque la contrainte appliquée est la contrainte maximale du matériau. Lorsque les contraintes appliquées diminuent, le matériau est sollicité en plasticité et peut endurer un nombre de cycles de fatigue qui dépend de l'amplitude de la déformation plastique qui lui est imposée à chaque cycle. Dans ce régime, dit de *la fatigue oligocyclique*, la durée de vie en fatigue est fortement dépendante du comportement plastique cyclique du matériau.

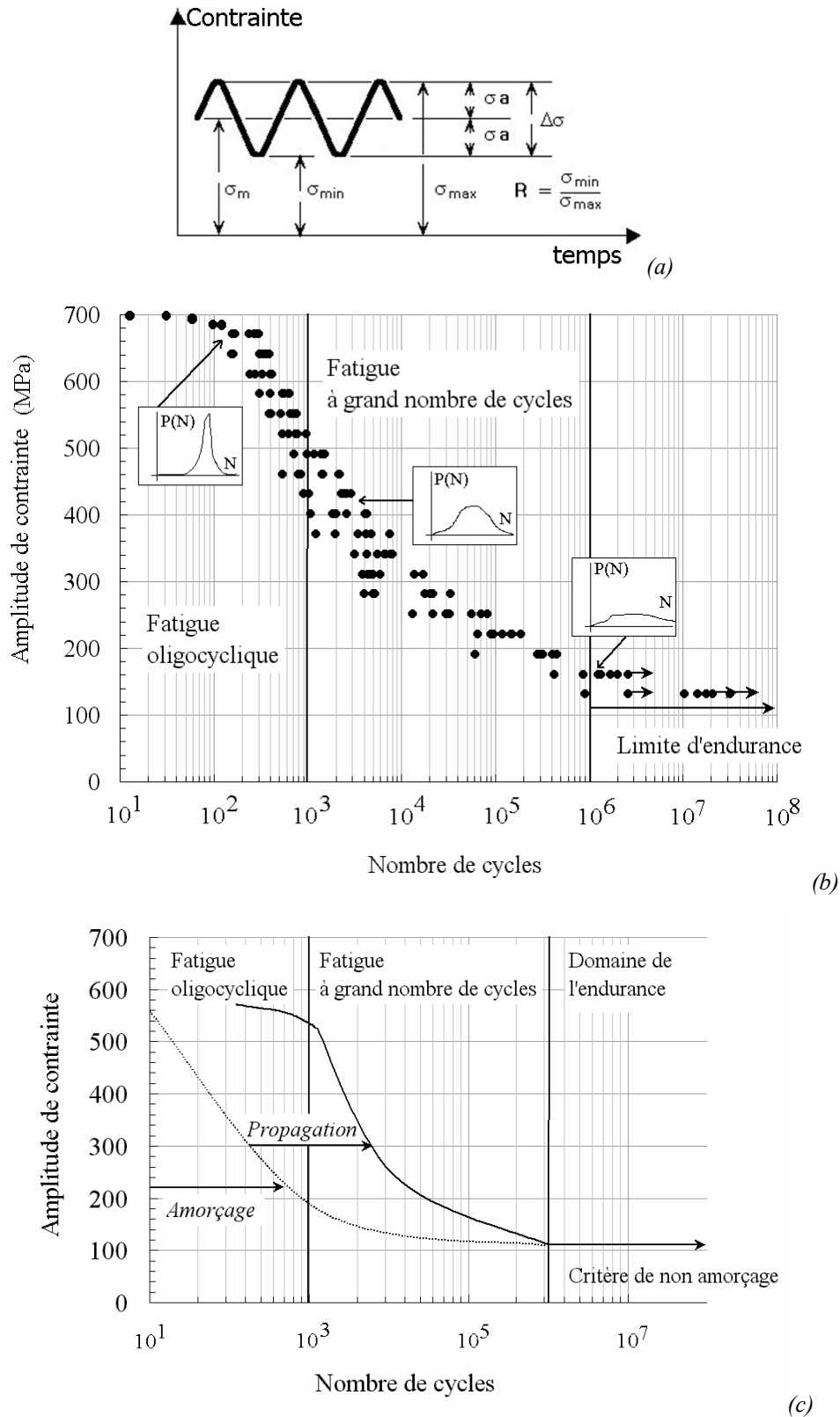


Figure 89 : (a) Paramètres caractérisant une sollicitation de fatigue, (b) Courbe de Wöhler, donnant la durée de vie d'un matériau métallique en fonction de l'amplitude de contrainte appliquée, pour $R=-1$. (c) illustration de l'importance des mécanismes, amorçage versus fissuration dans la durée de vie par fatigue.

Lorsque le matériau est sollicité dans son domaine d'élasticité macroscopique, c'est-à-dire dans le régime de la *fatigue à grand nombre de cycles*, la rupture provient de l'amorçage de fissures et de leur propagation par fatigue jusqu'à la rupture. Plus le niveau de contrainte est faible, plus la part de la phase d'amorçage dans la durée de vie augmente. Comme cette phase d'amorçage présente une grande

variabilité, elle n'est pas prise en compte pour le dimensionnement de la durée de vie des organes de sécurité des structures surtout si leur durée de vie doit être grande. Le dimensionnement est alors principalement fondé sur la prévision de la propagation des fissures de fatigue (mécanique de la rupture). On fait l'hypothèse qu'il existe un défaut dans le matériau, placé au point le plus critique de la pièce et dont la dimension est égale au seuil de résolution du moyen de contrôle employé. La durée de vie correspond alors au nombre de cycles nécessaires pour que ce défaut se propage jusqu'à la rupture.

Dans le *domaine de l'endurance*, une asymptote apparaît sur la courbe S-N (mais ce n'est pas toujours vrai), ce qui signifie que la rupture ne se produit pas même au bout d'un nombre de cycles « infini », soit parce qu'aucun défaut ne s'est amorcé, soit parce que les fissures cessent de se propager. Les critères habituellement employés pour dimensionner les structures dans le domaine de l'endurance, sont des critères de non-amorçage de fissures.

6.2.2 Mécanismes d'endommagement.

◇ Stades d'endommagement.

On distingue trois stades pour l'endommagement des matériaux par fatigue, la phase d'amorçage des fissures, la phase de propagation des fissures de fatigue et enfin la phase de rupture brutale. Cette dernière phase peut être fragile ou ductile. Elle ne sera pas abordée ici, mais dans le chapitre suivant portant sur les mécanismes de rupture ductile ou fragile.

L'amorçage peut se produire, soit sur un défaut, pré-existant dans le matériau ou créé au cours de la vie du matériau (rayure, piqûre de corrosion etc...), soit par micro-plasticité en surface.

La propagation des fissures par fatigue se distingue par l'existence de lignes sur la surface de rupture marquant des positions d'arrêt du front de la fissure. Ces lignes peuvent être observées à l'échelle macroscopique (on parle alors de lignes d'arrêt), comme à l'échelle microscopique (on parle alors de stries de fatigue).

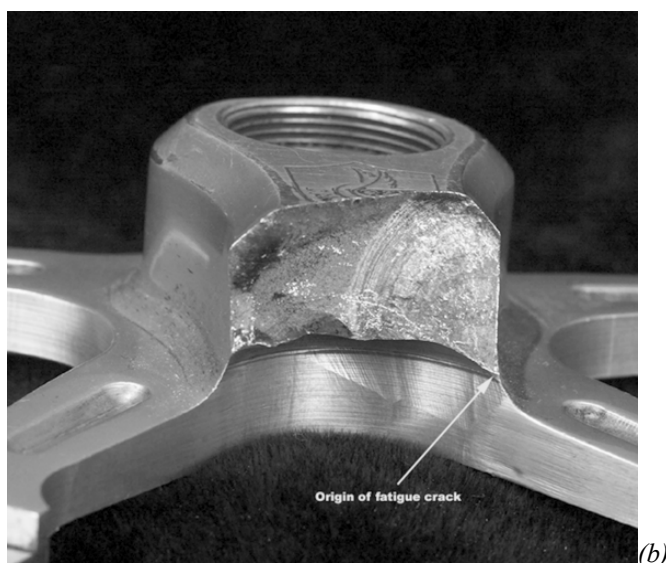
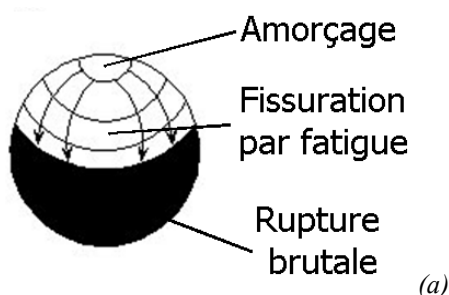


Figure 90 : (a) illustration des trois stades de la rupture par fatigue, l'amorçage, la propagation par fatigue, la rupture brutale, (b) exemple d'une rupture par fatigue.

◇ Phase d'amorçage

– Amorçage sur défaut.

Les défauts qui sont susceptibles de conduire à l'amorçage d'une fissure de fatigue sont nombreux. Quelques exemples de défauts sont donnés ci-dessous, selon la méthode d'élaboration :

Dans les pièces de fonderie les défauts principaux que l'on rencontre sont des ségrégations, des inclusions (Figure 91 (a)) ou encore des retassures. Dans les matériaux frittés, le défaut principal rencontré est la porosité du matériau due à une absence de cohésion entre grains de poudres (Figure 91 (b)). Dans les pièces forgées, les défauts sont ceux du lingot, modifiés par la déformation de corroyage. Les inclusions par exemple, sont brisées et leurs fragments dispersés au cours du corroyage.

Il peut aussi exister dans le matériau des fissures internes liées au procédé de mise en forme ou aux traitements thermiques. Ces fissures sont rares dans les alliages métalliques mais leur répartition n'est pas aléatoire et correspond souvent à un défaut du procédé de mise en forme.

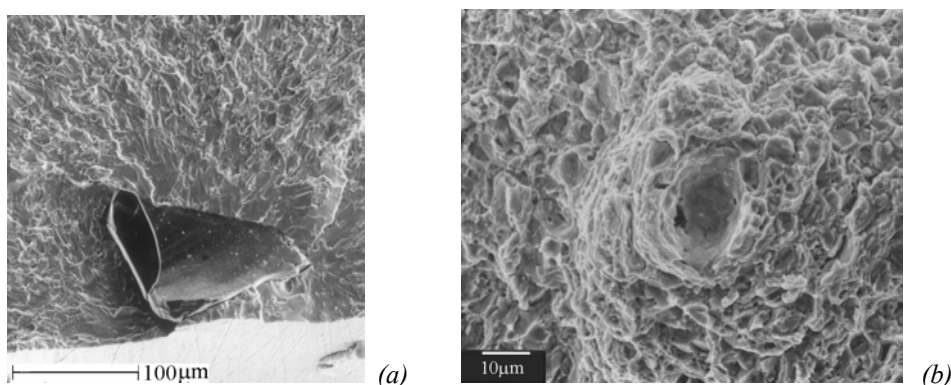


Figure 91 : Amorçage d'une fissure de fatigue, (a) sur une inclusion de céramique subsurfacique, (b) sur une porosité, alliage à base de Nickel N18 élaboré par métallurgie des poudres, [Pommier,1995]

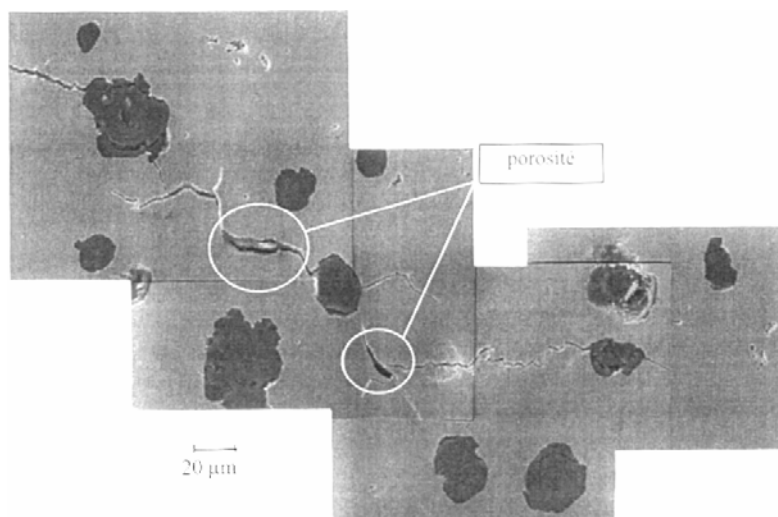


Figure 92 : Amorçage de micro-fissures de fatigue dans une fonte à graphite sphéroïdal, les fissures s'amorcent sur les nodules ou sur les porosités, les porosités sont sévères. [Dierickx,1996]

Les « défauts » peuvent aussi être des constituants du matériau, tels que des particules de seconde phase ou les joints de grains. Sur la Figure 92, extraite de la thèse de P. Dierickx [Dierickx,1996], on peut voir des micro-fissures de fatigue qui se sont formées à la surface d'une fonte à graphite sphéroïdal. Ces microfissures proviennent de porosités et de nodules de graphite.

Pour terminer, l'amorçage est aussi couramment associé aux effets de l'environnement. Comme on le voit sur la Figure 93 (a), des fissures de fatigue peuvent s'amorcer en surface sur une piqûre de corrosion. D'autre part, il a été montré par Murakami [Murakami,2000a], qu'une espèce fragilisante (ici l'hydrogène) en solution dans des inclusions, peut être libérée peu à peu dans le métal sous l'effet de la sollicitation mécanique et du temps. Une zone fragilisée se forme alors autour des inclusions, dont la

dimension augmente avec le nombre de cycles et dont la frontière avec la fissure de fatigue est repérable par une modification du contraste en microscopie optique (Figure 93 (b)). Lorsque cette zone est suffisamment grande, une fissure de fatigue peut se propager jusqu'à la rupture, et cela même pour un niveau de contrainte très faible. Ce mécanisme conduit à des ruptures d'éprouvettes pour des durées de vie supérieures à 10^7 cycles.

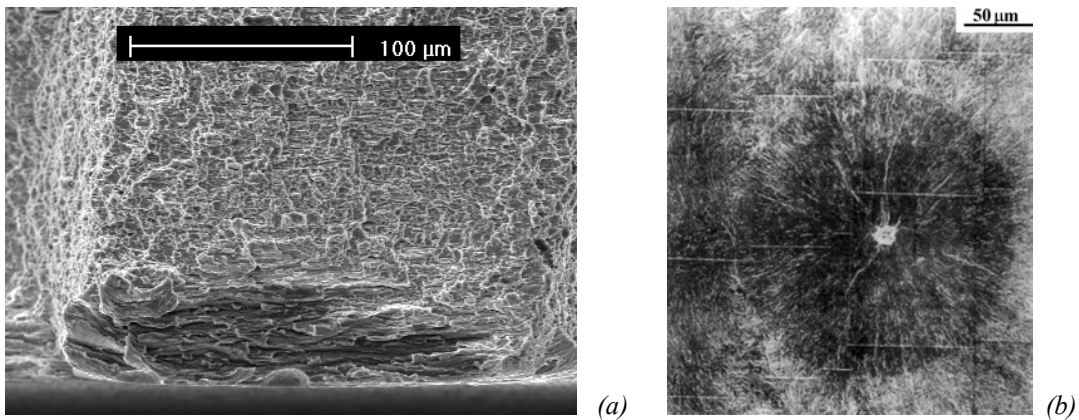


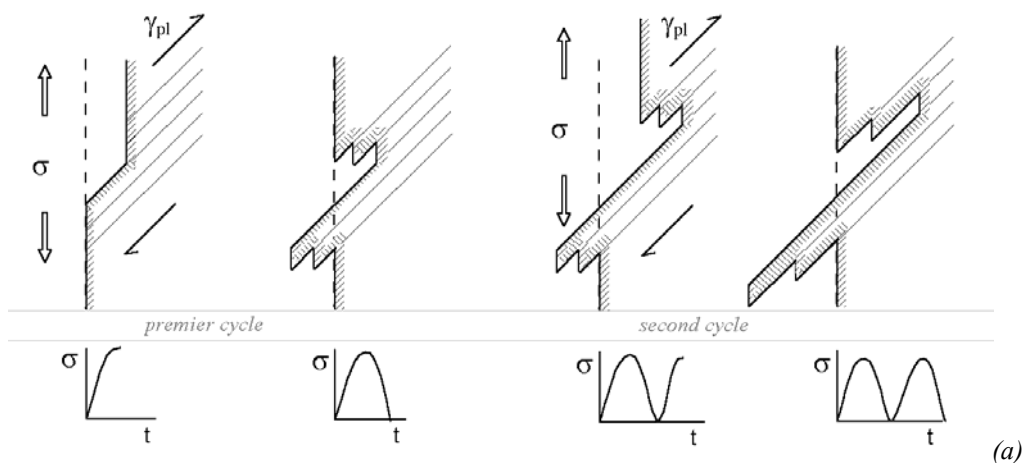
Figure 93 (a) Amorçage d'une fissure de fatigue par corrosion sous contrainte, Zircaloy 4 état détendu [Fandeur, 2001], (b) "optically dark area" [Murakami,2000a].

- Amorçage par micro-plasticité cyclique.

La seconde famille de mécanismes d'amorçage comprend les différents mécanismes d'amorçage associés à une déformation plastique cyclique en surface.

De très nombreux auteurs ont discuté des mécanismes permettant la formation des fissures par micro-plasticité cyclique. La formation d'intrusions et d'extrusions en surface, est généralement invoquée pour expliquer ce mécanisme. Lorsque le matériau est déformé dans son domaine d'élasticité macroscopique, il existe néanmoins des grains qui sont favorablement orientés pour le glissement ou qui sont soumis à une surcontrainte locale et qui entrent en plasticité. Comme cette déformation plastique reste très localisée, elle est quasi-indéetectable à l'échelle macroscopique, on parle alors de micro-plasticité.

Alors comme la déformation plastique est localisée sur des plans de glissements « intenses » des dislocations, des extrusions et intrusions se forment en surface. Au pied de ces reliefs, se forment progressivement des fissures qui se propagent ensuite par fatigue (Figure 94).



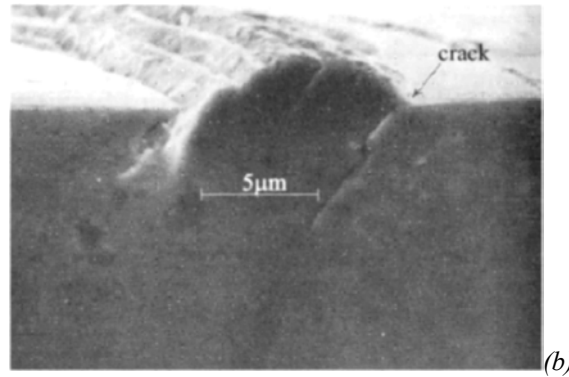


Figure 94 : (a) Mécanisme de formation d'extrusion et intrusion à la surface d'un échantillon sollicité en fatigue sous l'effet d'une déformation plastique cyclique localisée et présentant une certaine irréversibilité. (b) coupe d'une extrusion en surface (Suresh).

Par exemple, au cours de la déformation cyclique d'un Laiton (Figure 95), des marches se forment en surface à l'intersection entre les bandes de glissement des dislocations et la surface. L'évolution du relief de la surface durant les cycles de traction-compression a été suivi par microscopie à force atomique par Nakai [Nakai,1999]. Entre 1.10^4 et 6.10^4 cycles, le nombre de bandes de glissement n'augmente pas, mais le relief s'accroît. Un changement important se produit entre 6.10^4 et $1.2.10^5$ cycles (Figure 95 (d et e)). Les cartes de relief de surface sont tracées pour la contrainte de traction maximale du cycle de fatigue (à gauche), lorsque l'éprouvette est déchargée (au centre) et pour la contrainte de compression maximale du cycle de fatigue (à droite). A partir de $N=1.2.10^5$ (Figure 95 (e)), une « faille » apparaît nettement à l'intersection entre la ligne de glissement intense et la surface, à la contrainte maximale du cycle de fatigue, et se referme lors de la décharge et de la phase de compression, ce qui n'était pas observé pour $N=6.10^4$ cycles (Figure 95 (d)). Ce changement est interprété comme la conséquence de l'amorçage d'une microfissure.

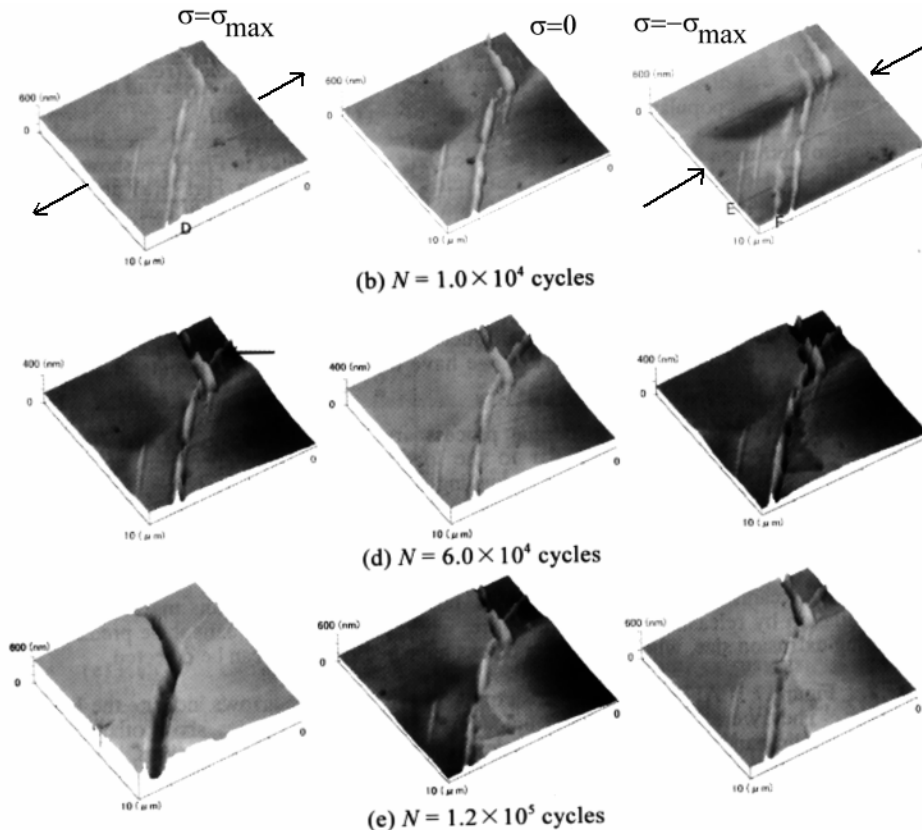


Figure 95 : Suivi par AFM sur une plage de $10\mu\text{m} \times 10\mu\text{m}$ de l'évolution du relief à la surface d'un échantillon sollicité en fatigue alternée à $\pm 120\text{ MPa}$ et $f=30\text{ Hz}$. Laiton α , 70%Cu, 30Zn, $R_e=217\text{ MPa}$, $R_m=317\text{ MPa}$, $A\%=54\%$, [Nakai,1999].

Une particularité importante de l'amorçage de fissures par micro-plasticité cyclique est le nombre de fissures qui s'amorcent en surface (Figure 96). Les fissures qui s'initient sur des défauts sont rares mais habituellement de grandes dimensions. Au contraire, les micro-fissures amorcées par micro-plasticité cyclique sont nombreuses mais leur longueur est souvent proche de la taille des grains. Des fissures de grande taille se forment alors par coalescence de micro-fissures.

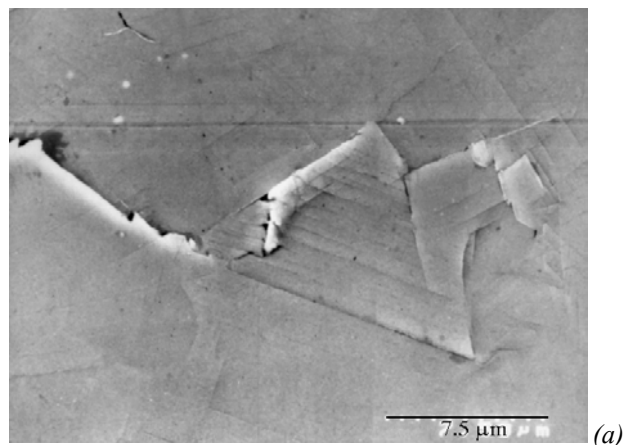


Figure 96 : Réseau de micro-fissures de fatigue à la surface d'une éprouvette lisse de TA6V (800 MPa, $R=-1$) [Le Biavant, 2000].

◇ Phase de propagation

- Stade I : cristallographique

Dans les tout premiers stades de la fissuration, il est généralement observé que la fissure se développe le long des plans de glissement des dislocations (Figure 97(a)). On parle alors de stade cristallographique. Lorsque la fissure se propage ainsi, le long de plans cristallins particuliers, l'aspect de la surface de rupture peut faire penser à une rupture fragile (par clivage), c'est pourquoi on utilise le terme de facettes de pseudo-clivage, bien qu'on y voie aussi des marques laissées par la propagation cyclique de la fissure (Figure 97(b)). Ces faciès de rupture s'observent en général autour des sites d'amorçage des fissures.



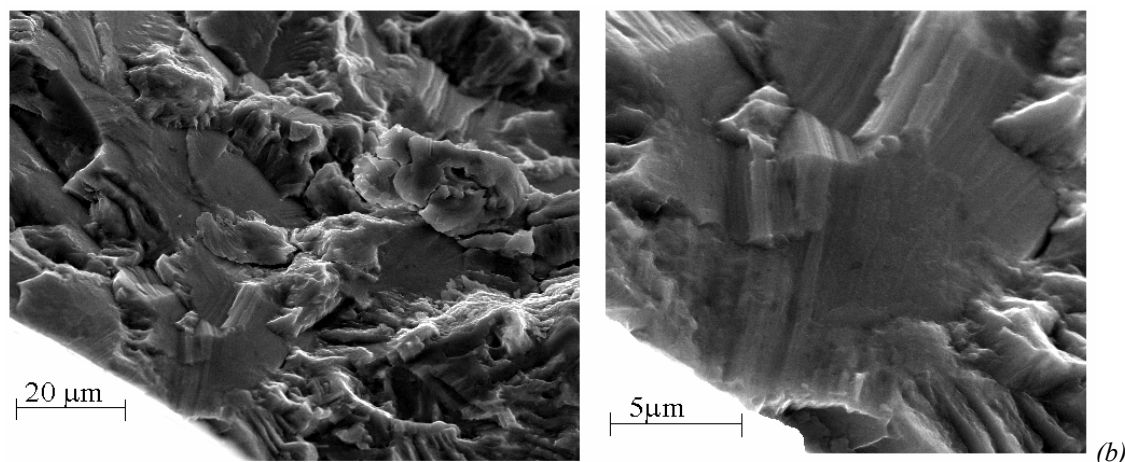


Figure 97: Fissuration par fatigue en stade I. (a) Fissure de fatigue dans un alliage de Nickel N18 à température ambiante, [Pommier,1992]. La fissure se propage dans un plan moyen entre deux plan de glissement. (b) Facettes de pseudo-clivage de fatigue près du site d'amorçage d'une fissure de fatigue dans l'alliage de Titane TA6V (20°C) [Sampalo,2000].

– Stade II : à stries.

Lorsque la longueur de la fissure augmente, la fissure se propage plus régulièrement, avec une sensibilité moindre à la cristallographie du matériau. On peut alors observer des stries de fatigue sur la surface de rupture (Figure 98 (a)) qui sont typiques d'une propagation par fatigue. Ces stries correspondent aux émoussesments successifs à l'extrémité de la fissure qui se produisent lors des phases d'ouvertures de la fissure (Figure 98 (a)). Ces stries sont également observées dans des matériaux ductiles non-cristallins, tels que des plastiques.

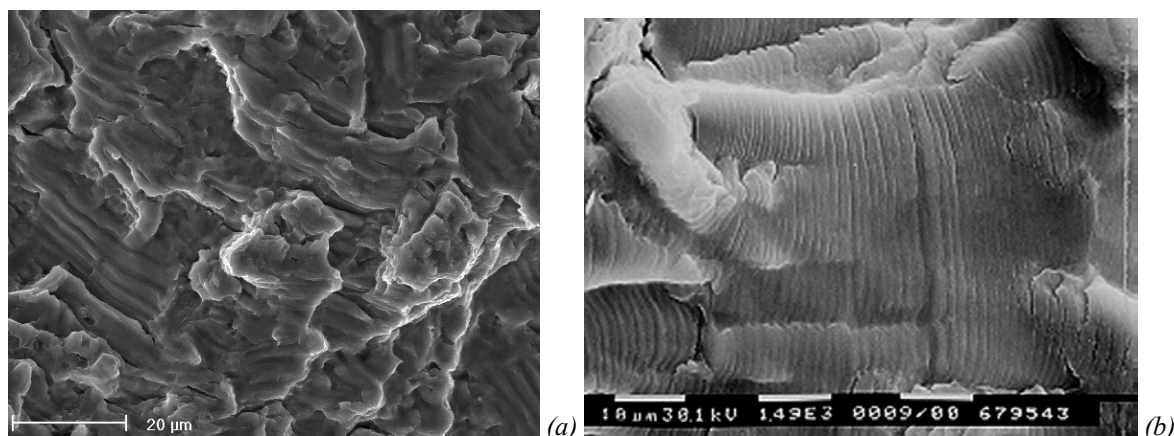


Figure 98 (a) Stries de fatigue dans l'alliage de Titane TA6V ($K_{max}=40 \text{ MPa}(m^{1/2})$, 20°C) [Malherbe,2000] (photo par I. Nedbal), (b) Stries de fatigue dans un alliage d'aluminium.

Les mécanismes permettant la propagation des fissures par fatigue en stade I et en stade II sont illustrés par la Figure 99 et la Figure 100 et ont été proposés respectivement par Laird [Laird,1967] et Neumann [Neumann,1969].

Lorsque le nombre de systèmes de glissement actifs est faible à l'extrémité de la fissure, soit du fait du faible niveau de contrainte appliqué, soit du fait de la structure du cristal, soit encore d'une tendance du matériau à localiser les déformations, la fissure peut néanmoins se propager. Elle glisse alternativement (Figure 99) sur un système puis un autre [Neumann,1969] lors de l'ouverture. Une branche de fissure se forme sur chaque plan de glissement. A la décharge, une déformation plastique en retour se produit, mais les nouvelles surfaces, exposées à l'environnement externe lors de l'ouverture de la fissure, ne se résorbent pas lors de la décharge. La fissure s'est donc étendue d'une longueur qui dépend du cosinus de l'angle entre la direction de glissement et le plan de la fissure. La propagation provient donc d'une composante du glissement dans la direction de propagation. La fissure se propage alors, sur un plan moyen à l'intersection des deux systèmes de glissement actifs et laisse de nombreuses branches secondaires de part et d'autre de ce plan (Figure 99).

Lorsque la déformation plastique à l'extrémité de la fissure est plus homogène, le mécanisme de formation des stries est essentiellement géométrique [Laird,1967] (Figure 100). La fissure s'ouvre sous l'effet des contraintes appliquées (a), et s'é moussse au fur et à mesure que le niveau de contrainte augmente (d). L'é mousssement plastique correspond à un allongement de la matière dans la direction normale au plan de la fissure et à une contraction dans la direction de propagation, puisque la déformation plastique se fait sans changement de volume. Lors de la décharge, la fissure se referme (e-f). L'extrémité de la fissure subit donc une déformation plastique en retour. La fissure s'est donc propagée d'une longueur approximativement égale à son é mousssement (Figure 100).

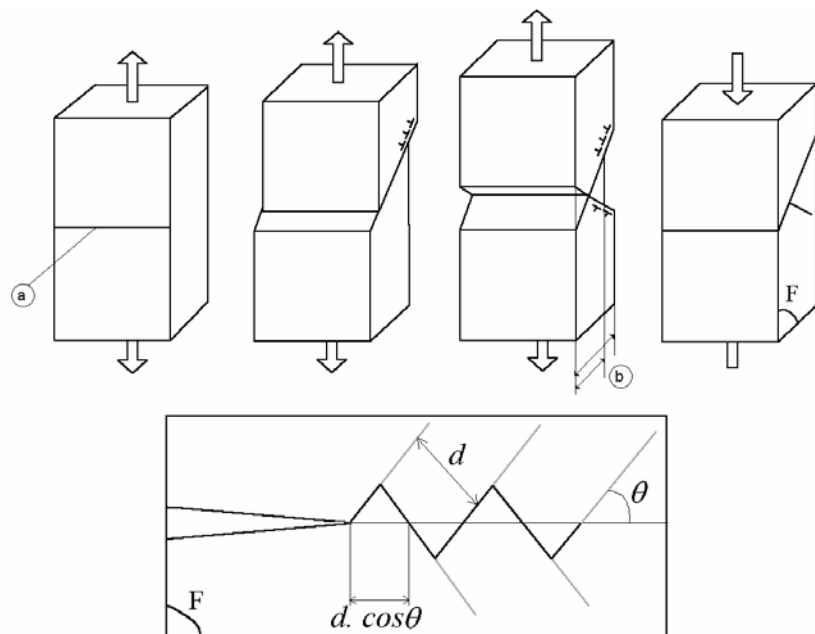


Figure 99: Mécanisme de formation des stries de fatigue selon Neumann [Neumann,1969], (a) extrémité de la fissure, (b) contraction plastique dans la direction de propagation, liée au glissement double.

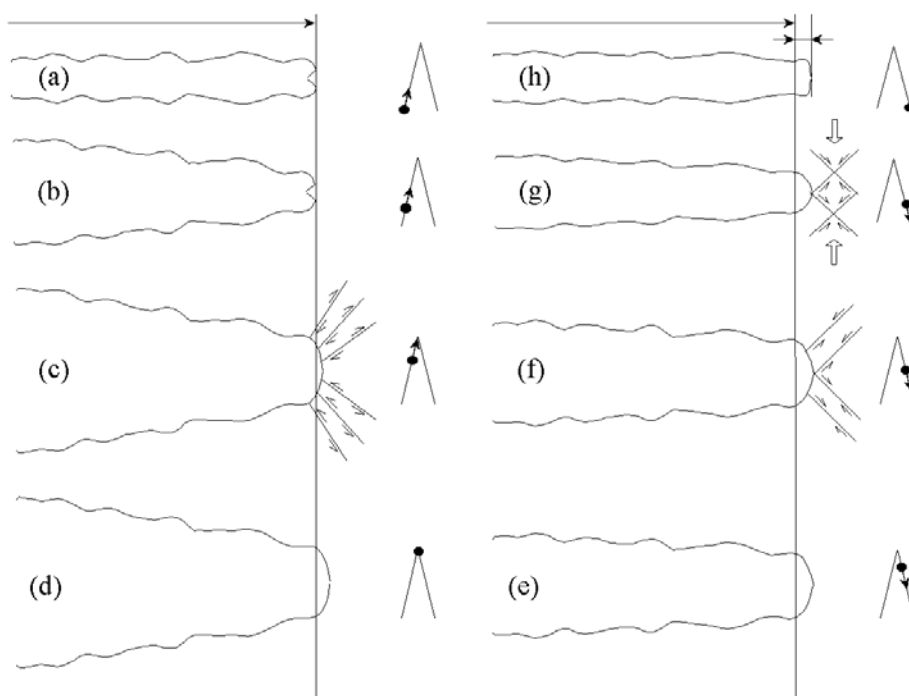


Figure 100: Mécanisme de formation des stries de fatigue selon Laird [Laird,1967]

Ce mécanisme de propagation géométrique (Figure 100) est très général et permet d'expliquer aussi la formation de stries de fatigue dans des matériaux ne possédant pas de plans de glissement, comme des polymères thermoplastiques par exemple.

6.2.3 Essais complémentaires

◇ Fatigue oligo-cyclique

Dans le domaine de la fatigue oligocyclique, on distingue encore trois comportements pour le matériau lorsqu'on applique des cycles de traction-compression à force imposée sur une éprouvette, l'adaptation, l'accommodation et le rochet.

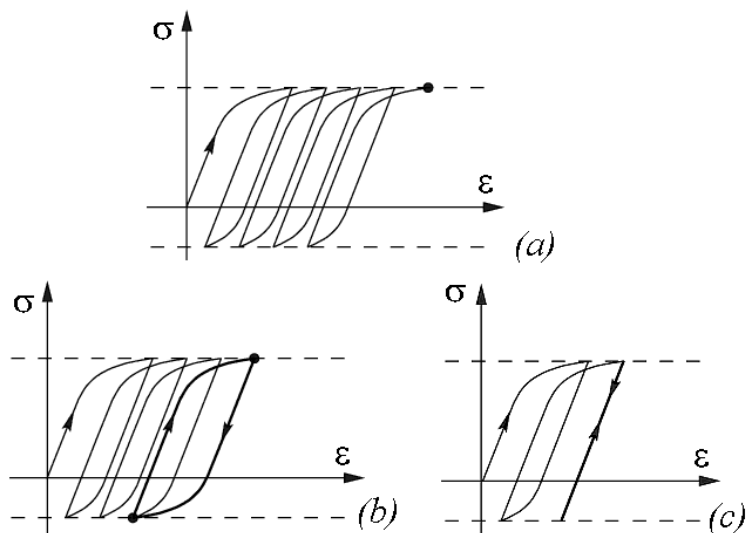


Figure 101 : Illustration des phénomènes (a) de rochet, (b) d'accommodation et (c) d'adaptation

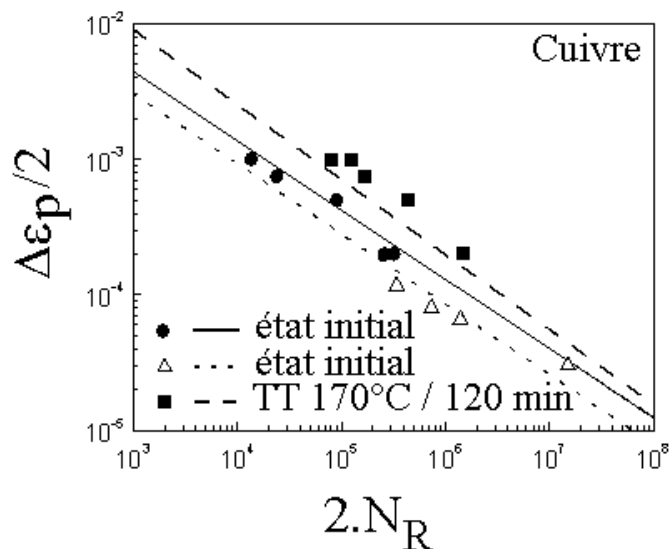


Figure 102 : Résultats d'un essai de Manson-Coffin sur du cuivre pur, à l'état écroui et après un traitement thermique. La demi-amplitude $\Delta\epsilon_p/2$ de la déformation plastique au cours d'un cycle est tracée en fonction du nombre de cycle à rupture N_R .

Si lorsqu'on applique des cycles de contrainte à une éprouvette la déformation plastique de l'éprouvette augmente progressivement à chaque cycle, on parle alors de *rochet* (Figure 101 (a)). Le critère de rupture est généralement de comparer la déformation de rochet à la déformation plastique répartie maximale admissible par le matériau.

Si au contraire les cycles se stabilisent, on parle alors d'*accommodation* (Figure 101 (b)). On peut dans ce cas relier le nombre de cycles à rupture à la demi-amplitude de la déformation plastique à chaque cycle. On observe que les résultats expérimentaux s'alignent sur une droite dans un diagramme bi-logarithmique (Figure 102), ainsi on peut généralement écrire la loi dite de Manson -Coffin dans le régime de fatigue oligocyclique :

$$N_R = A(\Delta \varepsilon_p)^n$$

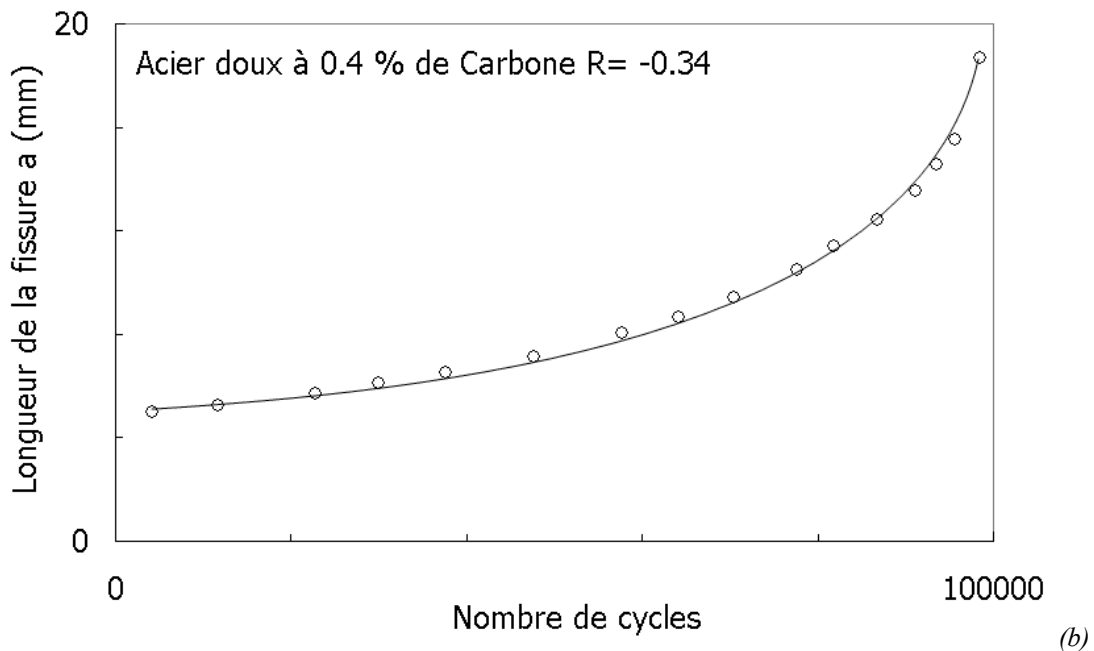
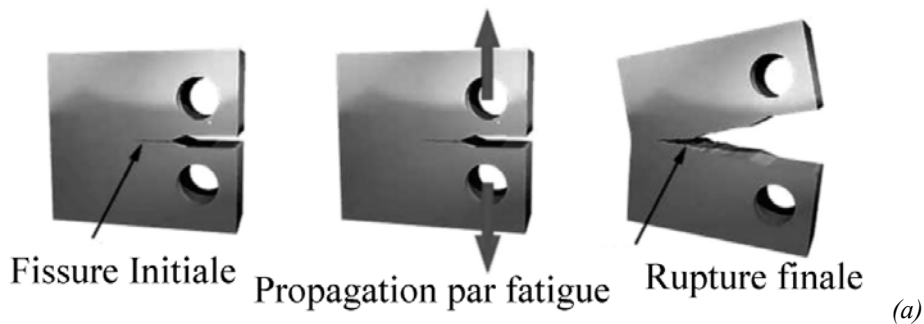
Si enfin au bout de quelques cycles, du fait de l'érouissage, le comportement du matériau devient élastique, on parle alors d'*adaptation* (Figure 101 (c)). Dans ce cas on se retrouve alors dans le régime de la fatigue à grand nombre de cycles.

◇ Fatigue à grand nombre de cycles

Comme on l'a dit plus haut, lorsque le nombre de cycles à rupture augmente, la part de la phase d'amorçage dans la durée de vie augmente et de fait la dispersion des durées de vie en fatigue pour une même amplitude de contrainte augmente aussi.

Si on cherche à dimensionner des composants de sécurité pour lesquels la probabilité de rupture tolérée doit être infime (par exemple 1 pour dix millions voire moins), le nombre d'essais de fatigue conventionnel à réaliser devient considérable, et leur durée est d'autant plus longue que la durée de vie est grande. Ainsi il devient prohibitif de caractériser les niveaux de contraintes à rupture pour des durées de vie importantes (quelques 100 000 cycles) avec une probabilité de rupture très faible.

On fait alors une hypothèse conservatrice, on suppose qu'il existe un défaut dans le matériau dont la dimension est égale au seuil de résolution du moyen de contrôle employé. Ensuite on cherche à définir le nombre de cycles nécessaires pour que ce défaut se propage jusqu'à la rupture. Pour cela on réalise des essais de fissuration en employant des éprouvettes fissurées qui sont sollicitées en fatigue.



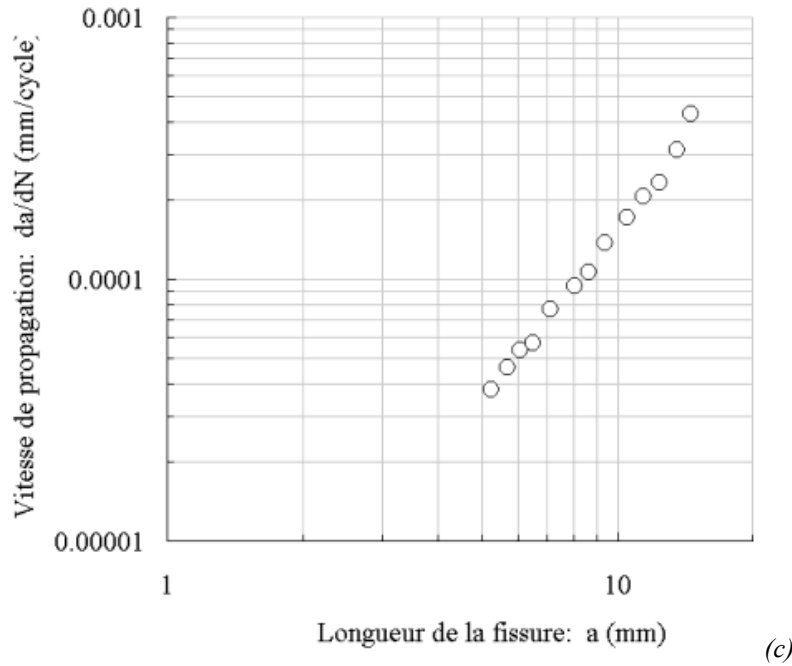


Figure 103 : (a) Exemple d'éprouvette employée pour caractériser la propagation des fissures de fatigue. (b) résultats expérimentaux obtenus par Rami Hamam sur un acier doux pour une amplitude d'effort appliquée constante. (c) La vitesse de fissuration augmente avec la longueur de la fissure.

Lors de ces essais on mesure l'évolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles appliqué pour une amplitude d'effort ou de contrainte constante. On constate en général que la vitesse de propagation de la fissure sous amplitude de contrainte constante dépend fortement de la longueur de la fissure. La mécanique de la rupture permet de définir les paramètres mécaniques contrôlant la vitesse de fissuration.

6.3 Éléments de mécanique linéaire de la rupture

6.3.1 Introduction

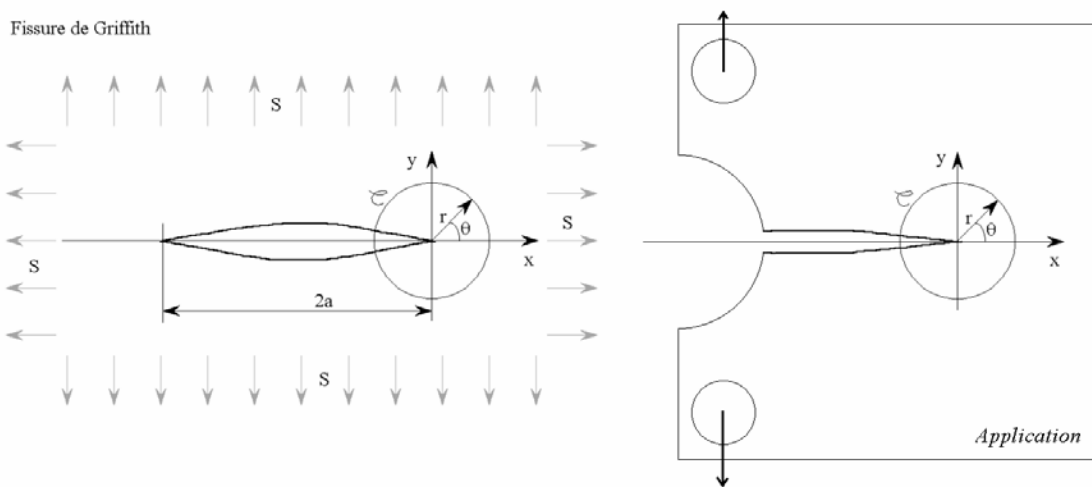


Figure 104 : Fissure de référence de Griffith et système de coordonnées en pointe de fissure. La fissure de Griffith [Griffith, 1921] est une fissure de longueur (2a) traversant une plaque infinie soumise à un chargement biaxial pur. A droite, on isole une région à l'extrémité de la fissure est isolée dans la pièce dont on cherche à calculer la résistance.

Dans le cas général, des défauts sont susceptibles d'exister en tout point d'une structure. La géométrie du défaut est a priori quelconque. Pour un dimensionnement fondé sur la mécanique de la rupture, seules les configurations les plus sévères sont retenues, c'est à dire des fissures planes, aiguës, placées dans les zones de la structure les plus sollicitées mécaniquement. On cherche donc à établir un critère qui permette de prévoir le risque de rupture sur la base d'une part, du champ de contrainte (σ) calculé pour la structure non-fissurée et d'autre part, d'hypothèses sur la géométrie, l'orientation, la dimension et la position des défauts.

Georges Irwin a établi le premier le concept de mécanique de la rupture en proposant d'isoler une région entourant la pointe de la fissure pour établir les critères de rupture [Irwin, 1957]. Une fissure constitue en effet un concentrateur de contrainte. Les contraintes et les déformations sont maximales dans une région entourant son extrémité (Figure 104 (a)). C'est dans cette région, généralement de petite dimension en fatigue, que se produisent les mécanismes physiques conduisant à l'extension de la fissure. Il semble donc suffisant de se limiter à comparer les sollicitations dans cette région seulement, pour prévoir le risque de rupture d'une structure à partir de caractérisations sur éprouvettes.

L'étendue de cette région dépend de la longueur de la fissure (Figure 105) et naturellement des contraintes appliquées. Pourtant, en élasticité linéaire, la *distribution* des contraintes autour de l'extrémité de la fissure est indépendante de ces deux derniers éléments, seule son *intensité* (K) l'est. Cette propriété remarquable permet d'établir des critères de rupture dans lesquels n'intervient qu'une seule quantité mécanique, l'intensité des contraintes à l'extrémité de la fissure.



Figure 105 : Deux fissures de fatigue sur le point de coalescer dans l'alliage de Nickel N18 testé à 60 Hz et à température ambiante, l'aspect granuleux autour des fissures provient de la déformation plastique des grains. L'étendue de la zone déformée augmente avec la longueur de la fissure [Pommier, 1992].

6.3.2 Modes de fissuration.

Une fissure plane se définit par les paramètres suivants, son plan (n), sa frontière (v) et le déplacement relatif de ses faces (u) (Figure 106 (a)). La fissure se propage dans la direction normale à sa frontière (v) selon trois modes élémentaires de fissuration, ouverture (I), cisaillement plan (II) et cisaillement anti-plan ou déchirure (III).

Le mode d'ouverture, ou mode I, correspond à la composante du déplacement relatif des faces de la fissure selon la normale au plan de la fissure (n). Le mode de cisaillement plan, ou mode II, correspond à la composante du déplacement relatif selon la direction de propagation (v). Enfin le mode de cisaillement anti-plan ou mode III, correspond à la composante tangente au front de la fissure (Figure 106 (b)). En élasticité linéaire, la sollicitation à l'extrémité de la fissure est la superposition linéaire des contributions de ces trois modes élémentaires.

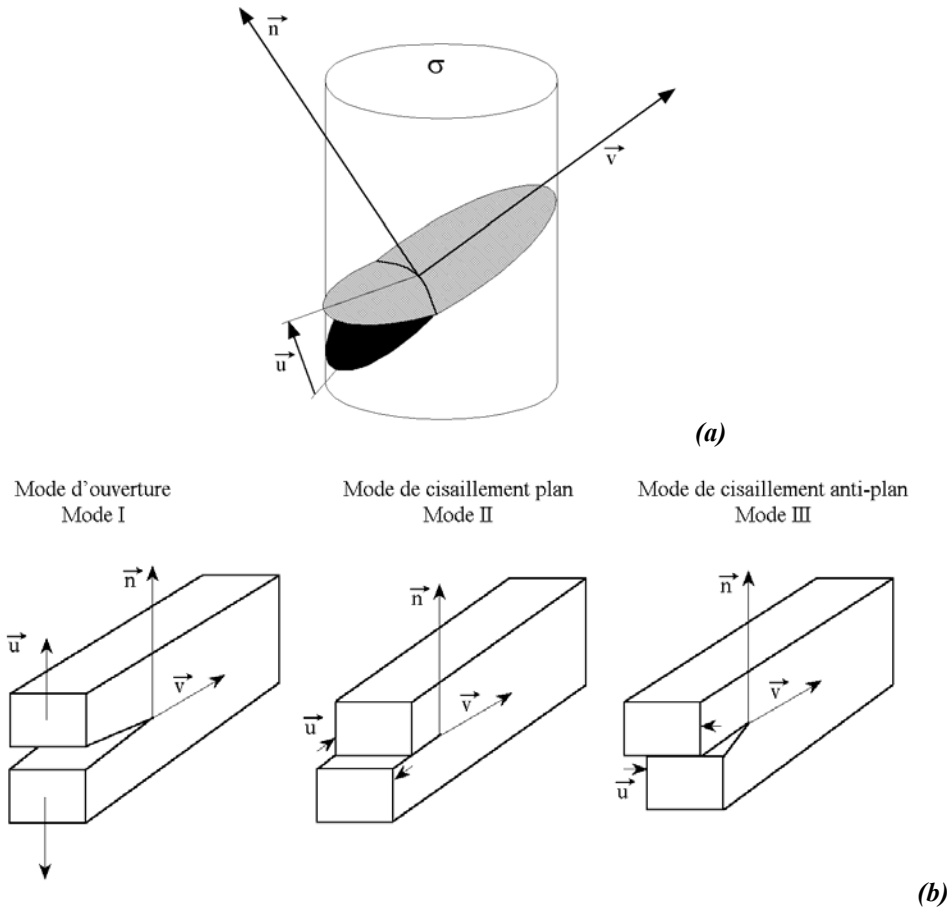


Figure 106 : (a) Paramètres définissant une fissure bi-dimensionnelle, (b) modes de fissuration.

6.3.3 Facteur d'intensité des contraintes

Les solutions analytiques pour les trois modes ont été déterminées de manière similaire en élasticité linéaire (voir la démonstration pour le mode I au paragraphe §8.3). En contraintes planes $\sigma_{zz}=0$ et $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ et en déformations planes $\sigma_{zz}=\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$ et $\kappa=3-4\nu$.

Ainsi les champs de contrainte, de déformation et de déplacement en élasticité linéaire sont-ils connus, leur forme ne dépend pas de la longueur de la fissure ou de la contrainte appliquée sur la structure, seule leur intensité en dépend.

Cette intensité, appelée aussi **facteur d'intensité des contraintes** varie linéairement avec la contrainte appliquée et évolue comme la racine d'une dimension caractéristique du défaut. On notera : $K_I = Y\sigma\sqrt{a}$, où a est la longueur de la fissure, σ la contrainte appliquée et Y un facteur géométrique dépendant de la forme de la fissure et du type d'éprouvette.

- Mode I

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) & u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) & u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned}$$

- Mode II

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) & u_x &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & u_y &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

- Mode III

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} & u_z &= \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0\end{aligned}$$

Les expressions du facteur d'intensité des contraintes en fonction de la longueur de la fissure et du type de chargement pour un grand nombre de géométries et de cas de chargement des fissures peuvent être trouvées dans les ouvrages de Tada, Paris et Irwin. [Tada,1985] et de Murakami [Murakami,1987].

Finalement le paramètre mécanique pertinent pour caractériser le comportement d'une fissure est donc le facteur d'intensité des contraintes.

6.4 Analyse d'un essai de fissuration par fatigue

Finalement, les champs de contraintes et de déformation autour de la zone plastique à l'extrémité de la fissure sont connus pour chaque mode de fissuration si l'on connaît le facteur d'intensité des contraintes. D'autre part, le chargement de fatigue est cyclique. Deux variables s'imposent donc, l'amplitude de variation du facteur d'intensité des contraintes (ΔK) et le rapport de charge $R=K_{\min}/K_{\max}$.

6.4.1 Régimes de fissuration par fatigue, Loi de Paris.

Au début des années soixante, Paris, Gomez et Anderson ont corrélé la vitesse de fissuration par fatigue à l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes [Paris, 1961].

Ce diagramme, tracé en coordonnées logarithmiques, fait apparaître trois régimes (Figure 107).

◇ Loi de Paris

Un régime central (régime B), dans lequel la vitesse de fissuration est proportionnelle à l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes à une puissance m . Les valeurs de m s'étagent généralement entre 2 et 4, voire 5 pour des alliages peu résistants à la fissuration par fatigue. Dans le cas de l'acier doux étudié m est trouvé égal à 3.5. Ce régime est appelé le régime de Paris [Paris, 1961].

◇ Ténacité

Au-delà (régime C), les vitesses de fissuration sont supérieures à celles prévues par la loi de Paris, la fissure se propage de manière instable pour $K_I=K_{IC}$. On appelle K_{IC} la ténacité en mode I du matériau.

◇ *Seuil de non-propagation*

En deçà (régime A), les vitesses de fissuration sont inférieures à celles prévues par la loi de Paris. Lorsque ΔK diminue jusqu'à atteindre le seuil de non-propagation ΔK_{th} , la vitesse de fissuration diminue rapidement, et la fissure semble apparemment s'arrêter ou du moins sa propagation devient indétectable.

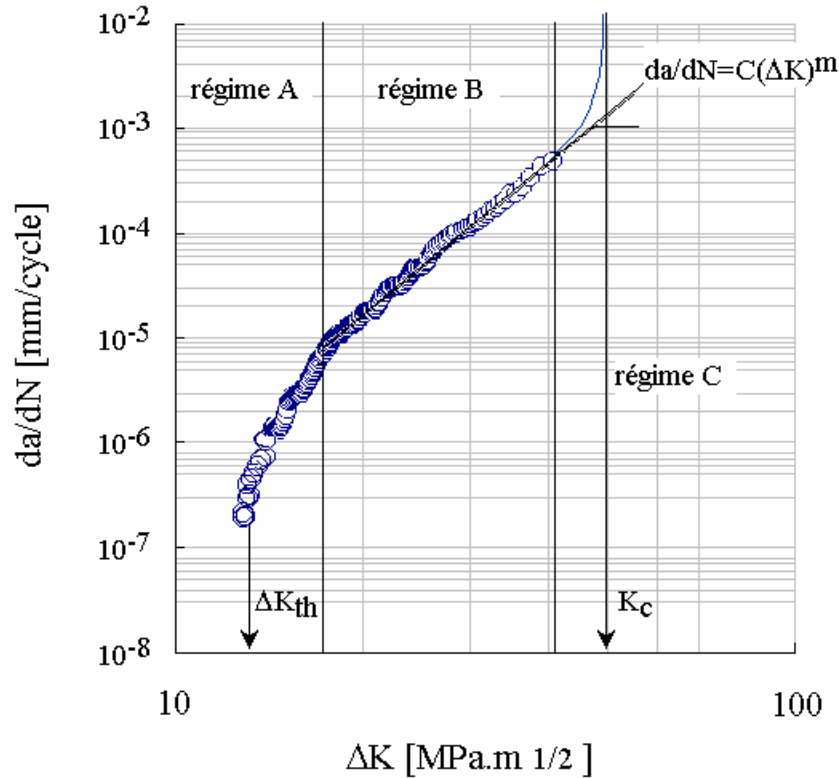


Figure 107 : Vitesses de fissuration mesurée sur éprouvette CT, sur un acier doux à 0.38 % de carbone à température ambiante et $R=0$. [Pommier,2001b], Illustration des différents régimes de propagation par fatigue.

L'intérêt de cette approche en fatigue réside dans la zone B, où régime de Paris, qui permet à l'ingénieur de construire une méthode de dimensionnement des pièces de sécurité. Si l'on considère, par exemple, une fissure centrale de Griffith dans une plaque sollicitée en traction cyclique ($0 < S < S_y$), dont la taille initiale est a_0 . La rupture se produit pour $K=K_c$. La durée de vie se calcule par intégration de la loi de Paris :

$$K = K_c \Rightarrow S_y \sqrt{\pi a_c} = K_c \Rightarrow a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_c}{S_y} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m \Rightarrow N = \int_{a=a_0}^{a=a_c} \frac{da}{C \cdot (\Delta S_y \sqrt{\pi a})^m}$$

Calcul de la dimension du défaut critique
Loi de Paris
Calcul de la durée de vie par intégration de la loi de Paris entre a_0 et a_c

6.4.2 Origine physique des trois régimes de fissuration par fatigue.

La corrélation entre la vitesse de fissuration macroscopique et le pas des stries sur la surface de rupture a été montrée par R. Pelloux [Pelloux, 1969]. Des mesures précises de pas de stries ont été réalisées en microscopie à balayage par Nedbal [Nedbal,1989], sur des matériaux variés qui montrent que, dans le régime de Paris, la propagation de la fissure est principalement pilotée par le mécanisme de formation des stries.

Le pas de strie moyen est mesuré sur les surfaces de rupture dans une plage de largeur Δl (Figure 108) [Nedbal,1989]. Le rapport D, entre la vitesse de propagation de la fissure da/dN , et le pas de strie,

est tracé sur la Figure 108, en fonction du pas de strie. Pour des pas de strie compris entre $0.05 \mu\text{m}$ et $2 \mu\text{m}$, la vitesse de propagation est de l'ordre d'une strie par cycle. Dans ce régime, la propagation de la fissure est donc bien régie principalement par la formation des stries.

Au-delà, pour un pas de strie supérieur à $2 \mu\text{m}$, il est observé que la vitesse de fissuration est supérieure à une strie par cycle. D'autres mécanismes de rupture contribuent à la propagation tels que des micro-déchirures ductiles et du clivage. Ainsi, dans le régime C, de forts écarts à la loi de Paris sont observés.

Enfin, pour un pas de strie inférieur à $0.05 \mu\text{m}$, la vitesse de fissuration da/dN est inférieure à une strie par cycle (régime A). Le processus de croissance est discontinu, la fissure se propage dans certains grains bien orientés en pointe de fissure, tandis qu'elle reste bloquée en d'autres points [Nedbal, 1989]. Ceci introduit un effet d'échelle. En effet, si le nombre de grains sur le front de la fissure est important, il se trouvera toujours des grains dans lesquels la fissure se propage et d'autres où elle est arrêtée. La vitesse de fissuration moyenne est alors faible mais régulière. En revanche, si le nombre de grains sur le front de la fissure est faible, la vitesse de fissuration da/dN est extrêmement variable, au cours de la propagation et d'une fissure à l'autre. Dans ce régime, où la vitesse de fissuration est très faible, les mécanismes physiques dépendants du temps prennent une grande importance ; corrosion de surface, fragilisation par diffusion en volume, croissance d'une couche d'oxyde, relaxation des contraintes.

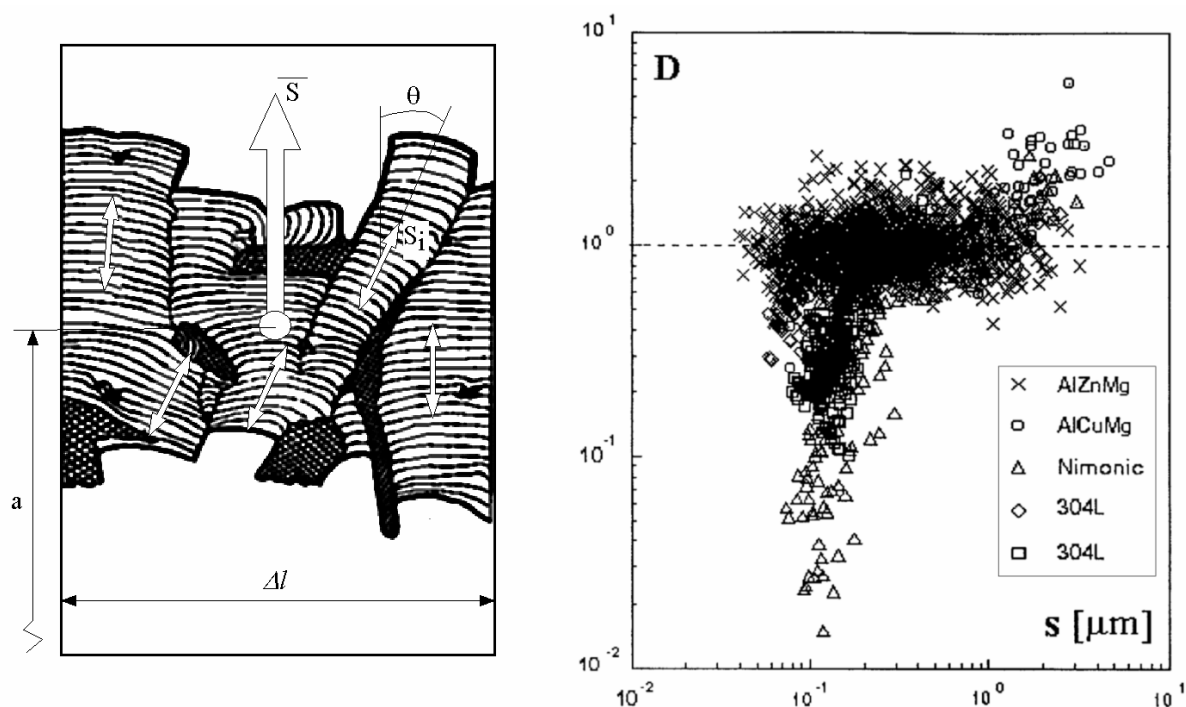


Figure 108 : Méthode de mesure d'un pas de strie moyen sur une surface de rupture à gauche. À droite, rapport D de la vitesse de fissuration mesurée da/dN et du pas de strie S , tracé en fonction du pas de strie pour divers matériaux [Nedbal, 1989].

6.5 Résumé

◇ *Essai de fatigue*

- La fatigue consiste à solliciter cycliquement un matériau, ce qui conduit à son endommagement puis à sa rupture.
- Essais conventionnels, courbes S-N (amplitude de contrainte / nombre de cycles appliqués) ou de Wöhler. Plus l'amplitude de contrainte est faible plus la durée de vie augmente. A même amplitude de contrainte, les résultats expérimentaux sont toujours dispersés.
 - Domaine de la fatigue oligocyclique, faible durée de vie, amplitude de contrainte élevée, déformation plastique cyclique. Dispersion faible, Loi de Manson-Coffin : $N_R = A(\Delta\epsilon_p)^n$, N_R nombre de cycles à rupture, $\Delta\epsilon_p$ amplitude de la déformation plastique cyclique.
 - Domaine de la fatigue à grand nombre de cycles : phase d'amorçage des défauts, très dispersée, et phase de propagation de ces défauts, moins dispersée. La dispersion augmente lorsque la durée de vie augmente.
 - Domaine de l'endurance : durée de vie « infinie », faible amplitude de contrainte, ce domaine n'existe pas toujours.

◇ *Mécanismes d'endommagement, cas des métaux*

- Phase d'amorçage :
 - Amorçage sur des défauts du matériau (inclusion, porosité, retassure etc...) ou se formant au cours de la vie du matériau (rayure, piqûre de corrosion), dispersion des nombres de cycles à l'amorçage.
 - Amorçage par micro-plasticité, des fissures se forment sur les bandes de glissement intenses des dislocations, moins de dispersion
- Phase de propagation : propagation de la fissure cycle à cycle avec formation de stries sur la surface de rupture, en général assez peu de dispersion de la vitesse de fissuration.

◇ *Mécanique de la rupture*

- Modes de fissuration : déplacement relatif des faces de la fissure. Mode I ouverture, Mode II cisaillement plan, Mode III cisaillement antiplan
- Solution élastique connue pour chaque mode, la forme du champ est donnée, son intensité dépend d'un unique paramètre pour chaque mode, le facteur d'intensité des contraintes K_I , K_{II} ou K_{III} . Le facteur d'intensité des contraintes est proportionnel à la contrainte appliquée sur l'éprouvette et proportionnel à la racine d'une dimension caractéristique de la fissure (ex. sa longueur a)
- Essai de fissuration par fatigue, vitesse de fissuration (da/dN) en fonction du facteur d'intensité des contraintes K_I , ou K_{II} ou K_{III}
 - Si l'amplitude ΔK_I est inférieure au seuil de non propagation ΔK_{th} , la vitesse est nulle
 - Dans le régime de Paris : $\frac{da}{dN} = C\Delta K^m$
 - Si le facteur d'intensité des contraintes atteint une valeur critique appelée ténacité du matériau K_{IC} la fissure se propage de manière brutale

6.6 Problèmes

6.6.1 Choix de matériaux pour la réalisation d'un réservoir sous pression :

Objectifs : Dimensionnement avec prise en compte de la fissuration, ténacité, propagation des fissures de fatigue

On désire réaliser un réservoir destiné à stocker un gaz sous une pression de 21 MPa (210 bars). Le réservoir est dimensionné, pour rester dans son domaine d'élasticité d'une part avec un coefficient de sécurité de 1.6, et d'autre part pour qu'un éventuel défaut conduise à une fuite plutôt qu'à une explosion. Il faudra donc faire intervenir la notion de ténacité du matériau, qui représente sa résistance à la propagation instable d'une fissure.



- Le réservoir est supposé cylindrique à parois minces
- La longueur L est fixée
- Le rayon, l'épaisseur et la masse par unité de longueur sont à déterminer.
- A l'issue de ce dimensionnement, on désire connaître la durée de vie en fatigue de la pièce :
 - après un essai de timbrage (pression test de 1.5 fois la pression de service)
 - après un contrôle non-destructif par ultrasons pour lequel est garantie la détection de défauts dont une dimension est supérieure à 2 mm.

Les propriétés de quelques matériaux sont fournies dans le tableau ci-dessous :

Matériau	Limite d'élasticité ($R_{p0.2}$) (MPa)	densité, (ρ) (kg/m^3)	Ténacité, (K_{IC}) ($\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$)	Exposant de la loi de Paris (m) (da/dN en m/cycles)	Constante de la loi de Paris (C) (da/dN en m/cycles)
20 ND 3	450	7800	220	2.9	$4.3 \cdot 10^{-13}$
35 NCD 16	1500	7800	80	2.5	$3.9 \cdot 10^{-11}$
XC38	325	7800	60	3.5	$1.5 \cdot 10^{-11}$
TA6V	827	4480	96	2.5	$2.4 \cdot 10^{-10}$
7075-T6	620	2700	55	2.88	$1.0 \cdot 10^{-9}$

n.b : Pour simplifier les calculs on suppose que le facteur d'intensité des contraintes se calcule de la façon suivante à partir de la plus grande dimension ($2a$) d'un défaut : $K_I = 2\sigma_\infty\sqrt{a}$, où σ_∞ est la plus grande contrainte principale.

◇ *Question 1 : Dimensionnement du réservoir*

On se place dans un repère cylindrique dans lequel σ est diagonal
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- Calculez σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rr}
- Exprimer le critère permettant de vérifier que la pièce reste dans son domaine d'élasticité.
- Exprimer le critère permettant de vérifier qu'il y aura fuite avant rupture. L'éclatement du réservoir étant à éviter dans tout les cas.
- Point de fonctionnement, calculer le couple (rayon, épaisseur) optimal qui est l'intersection des deux critères et noté (R_{opt}, e_{opt}) . Expliquez en quoi ce point est un optimum.
- Calculez l'évolution du rapport f = volume stocké/ masse de réservoir en fonction du rayon du réservoir. Donnez la valeur maximale de ce rapport.
- A.N. Pour chaque matériau, calculez R_{opt} , e_{opt} , f_{max} . Discutez des choix de matériau en fonction des types de réservoir, grand réservoir terrestre, grand réservoir embarqué, petit réservoir embarqué...

◇ *Question 2 : Calcul de la durée de vie du réservoir.*

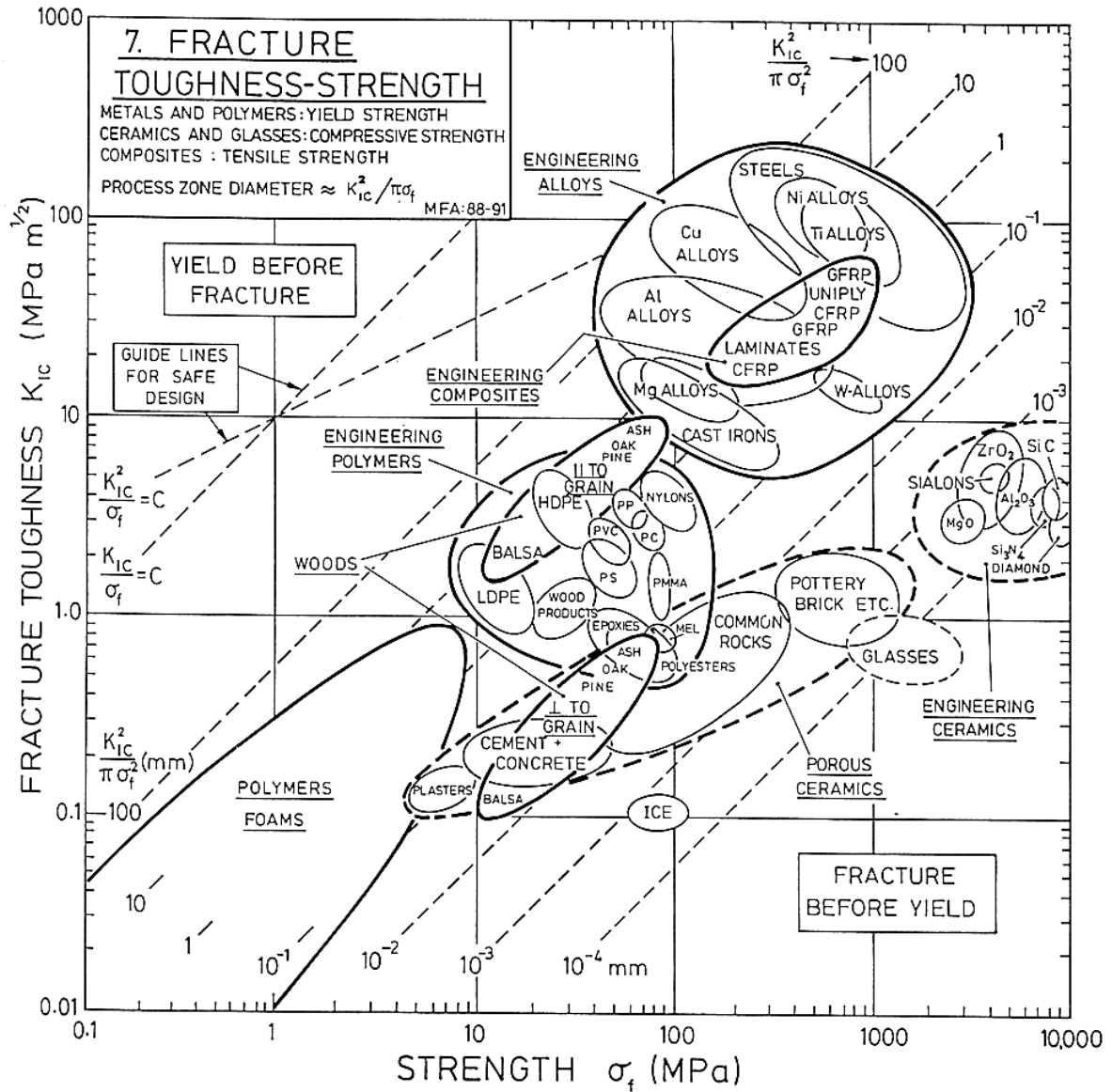
- Essai de Timbrage

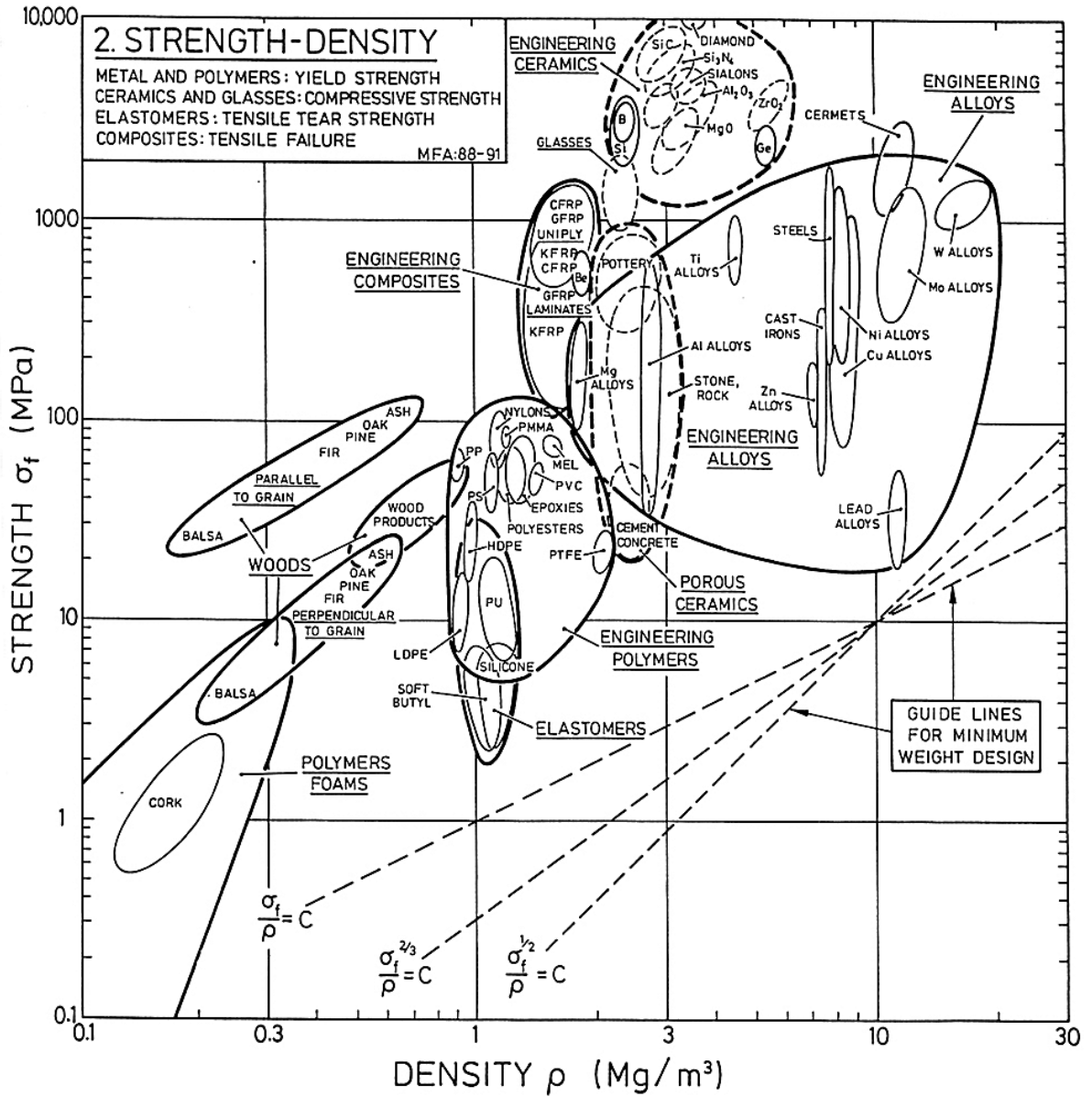
Cet essai est un essai de contrôle destructif. Une pression supérieure à la pression de service (1.5 P) est appliquée au réservoir (d'où le coefficient de sécurité 1.6 sur Rp0.2). Si la pièce contient un défaut tel que $K=K_{IC}$ le réservoir se rompt. L'essai doit être réalisé en fosse. Calculez la valeur maximale a_T du défaut potentiel dans un réservoir qui a résisté à l'essai de timbrage. On suppose que le réservoir a des dimensions optimales $R=R_{opt}$, $e=e_{opt}$.
- Contrôle non-destructif

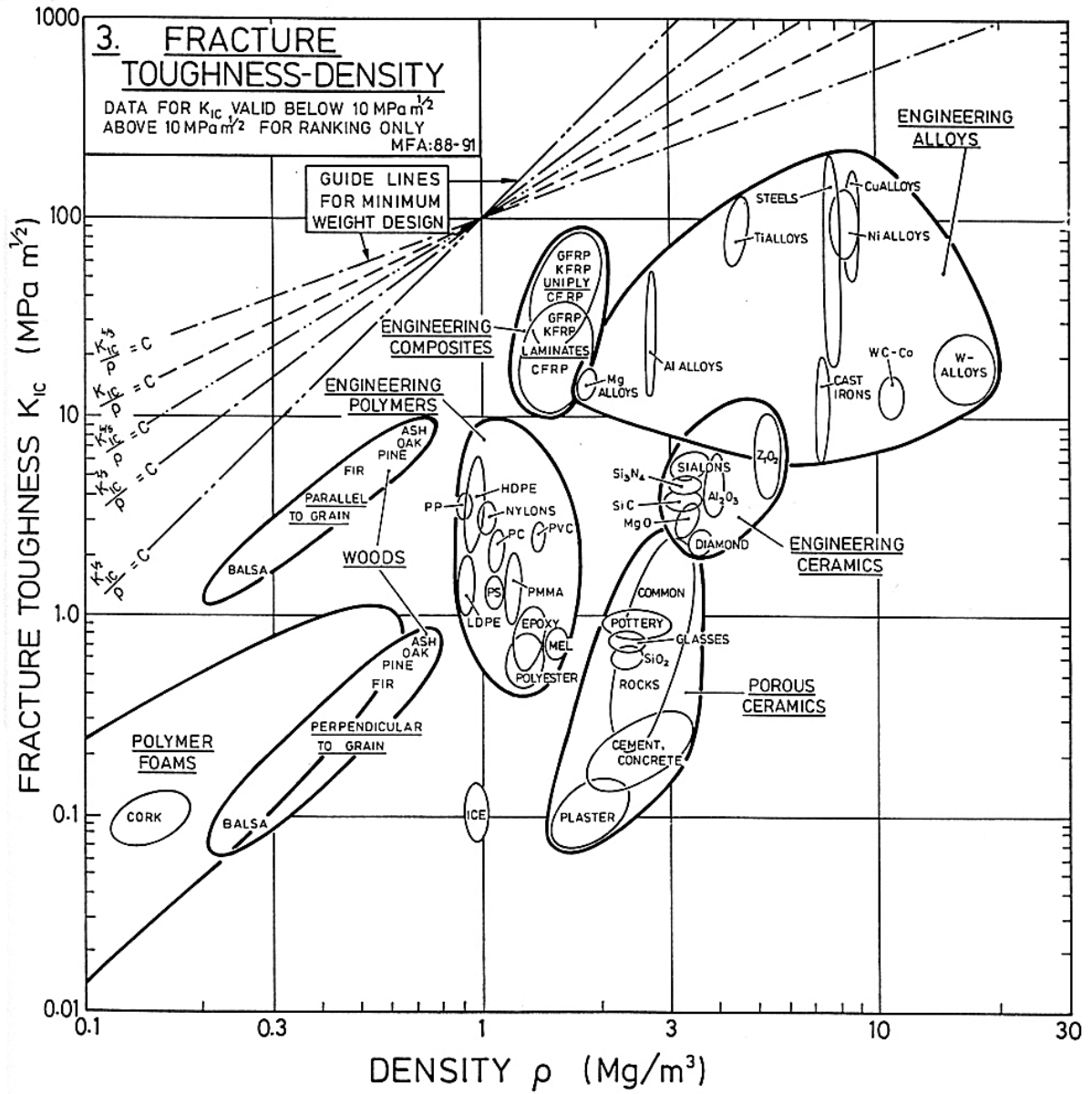
Un contrôle non-destructif par ultrasons permet de détecter des défauts d'une longueur $a_{US}=2mm$. Dans quel cas doit on appliquer l'essai de timbrage et dans quel cas doit on préférer le contrôle par US.
- Calcul de la durée de vie

Connaissant les coefficients m et C de la Loi de Paris : $\frac{da}{dN} = C\Delta K^m$, calculez la durée de vie minimale du réservoir, en fonction de la dimension initiale de la fissure ($a=a_T$ ou $a=a_{US}$) et de sa dimension finale.
- A.N. Choix de matériau pour une bouteille de plongée

Calculez les durées de vie du réservoir pour chaque matériau. Quels sont les matériaux candidats pour la réalisation d'une bouteille de plongée ? Quels autres critères devront être pris en compte ? Même question pour la réalisation d'une cuve de centrale nucléaire.







7 RUPTURE FRAGILE, RUPTURE DUCTILE

7.1 Introduction

En dehors des sollicitations thermomécaniques « normales », que peut subir une structure ou un composant (chargement simple, fatigue, fluage) il peut aussi survenir des sollicitations exceptionnelles pouvant conduire à la rupture brutale de la pièce. L'étude de la rupture et l'optimisation des matériaux pour ces sollicitations exceptionnelles permet de limiter les conséquences d'un accident.

Parmi les dimensionnements « classiques » à la rupture que pratiquent les bureaux d'étude, on peut citer par exemple, le crash automobile ou la résistance de structures du génie civil aux tremblements de terre ou à l'impact. Ces dimensionnements peuvent avoir plusieurs objectifs. Dans le cas du crash automobile, par exemple, on cherche à absorber la plus grande part possible de l'énergie du choc par la déformation et la rupture du véhicule afin de protéger les passagers. On peut aussi vouloir contrôler la taille des fragments éjectés lors de la rupture d'une pièce tournante (ex. pneumatiques du Concorde), enfin on peut chercher à garantir qu'un bâtiment ne s'écroule pas lors d'un tremblement de terre, même si l'on accepte qu'il soit fortement endommagé.

Pour cela, il faut d'une part comprendre l'origine physique des ruptures, afin de pouvoir optimiser les matériaux pour une application donnée, et d'autre part savoir modéliser la rupture afin de dimensionner les structures. Les modèles de rupture pourront être assez différents selon le type de matériau et selon les vitesses de sollicitation.

Les ruptures brutales peuvent en effet être soit de type ductile, soit de type fragile. On parlera de rupture fragile lorsque l'énergie absorbée par la rupture est très faible, on parlera de rupture ductile lorsque cette énergie est élevée.

Les céramiques et les verres sont fragiles, mais certaines céramiques peuvent néanmoins absorber une énergie significative lors de leur rupture lorsque de nombreuses fissures se développent simultanément. On parle alors de comportement quasi-fragile. Les métaux sont généralement ductiles mais les aciers présentent pourtant une transition ductile-fragile lorsqu'on abaisse la température et deviennent fragiles à froid. C'est par cette transition que l'on explique la rupture de plusieurs liberty-ship au cours de la seconde guerre mondiale lors des mois rigoureux d'hiver ou les conséquences dramatiques de l'impact d'un iceberg sur la coque du Titanic.

Ainsi pour un même matériau plusieurs types de comportement à la rupture peuvent être rencontrés, selon la température, la teneur en défauts, la taille des défauts etc...

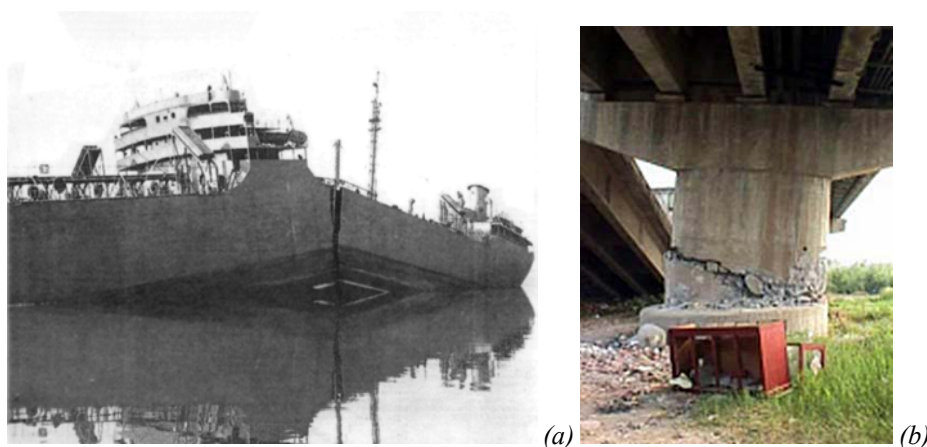


Figure 109 : Rupture fragile d'un liberty-ship (seconde guerre mondiale) au cours d'un hiver rigoureux, (b) rupture d'un autopont lors d'un tremblement de terre.

7.2 Essais de rupture

Comme pour la fatigue, on peut distinguer deux familles d'essais de rupture.

Les essais d'endommagement, au cours desquels des défauts sont initiés dans le matériau (phase d'endommagement) puis coalescent, forment une fissure principale qui se propage jusqu'à la rupture de l'éprouvette. Dans ce type d'essai, l'existence ou non, avant l'essai, de défauts dans le matériau, modifie significativement la contrainte à rupture. Aussi, en général les contraintes ou les déformations à rupture mesurées au cours d'essai d'endommagement sont elles fortement dispersées.

Par ailleurs, il existe aussi des essais sur éprouvettes pré-fissurées. Des fissures de dimension et de forme contrôlées, ont été créées artificiellement dans l'éprouvette avant le début de l'essai. On élimine donc la phase d'endommagement. Au cours de l'essai, on détermine le seuil au-delà duquel la fissure se propage et conduit à la rupture de l'éprouvette. On parle alors d'essais de fissuration.

7.2.1 Essais d'endommagement et rupture

◇ Essai de traction

L'essai le plus courant est l'essai de traction jusqu'à la rupture. Lors d'un essai de traction, on peut observer deux comportements distincts sur les matériaux métalliques, un comportement fragile, ou un comportement ductile.

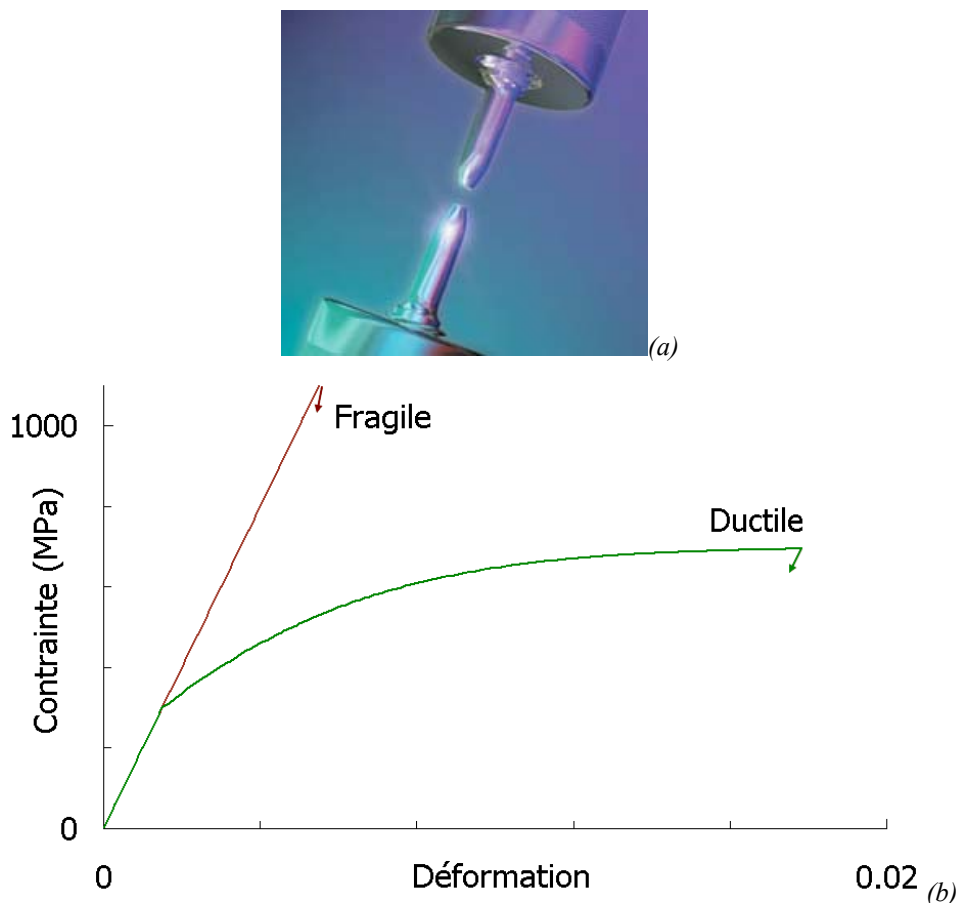


Figure 110 : (a) essai de traction, striction et rupture, (b) illustration, comportements ductile et fragile.

Lorsque la rupture est fragile, pour un métal, son comportement macroscopique reste élastique jusqu'à la rupture qui survient de manière brutale. En revanche lorsque la rupture est ductile, le matériau présente de la déformation plastique, de l'endommagement dans la zone de striction puis une rupture au niveau de la striction. L'énergie absorbée par la rupture est essentiellement due à la déformation plastique répartie puis localisée au niveau de la striction et assez peu à la création de défauts dans la zone

endommagée. On peut calculer l'énergie absorbée comme l'aire sous la courbe contrainte-déformation plastique.

◇ Essai brésilien

Les essais de traction classiques sont assez difficiles à mettre en oeuvre sur des céramiques ou des verres. On préfère souvent employer des éprouvettes cylindriques simples, sans têtes, et réaliser un essai de compression diamétrale appelé aussi essai Brésilien. Cet essai est classique pour les bétons et les mortiers, on peut aussi l'employer pour les bois et certains matériaux composites.

Au cours de l'essai, (Figure 111 b) les contraintes sont compressives partout selon l'axe x_2 de compression du cylindre mais en traction selon l'axe orthogonal x_1 . La contrainte de traction est maximale au niveau de la section centrale ($x_1=0$) et constante sur toute cette section sauf sous les appuis. En adoptant la notation tensorielle et les notations de la Figure 111 (b), le champ de contrainte dans le cylindre s'écrit comme suit, en fonction de la charge par unité d'épaisseur P :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{-2P}{\pi} \left[\frac{\cos \theta_1}{r_1} \vec{e}_{r_1} \otimes \vec{e}_{r_1} + \frac{\cos \theta_2}{r_2} \vec{e}_{r_2} \otimes \vec{e}_{r_2} - \frac{1}{D} I \right]$$

$$\text{Avec } \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad (\vec{a} \otimes \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad \text{où } (\vec{b} \cdot \vec{c}) \text{ est le produit scalaire.}$$

$$\text{Ainsi sur l'axe } x_1=0 : \vec{e}_{r_1} = -\vec{x}_2, \vec{e}_{r_2} = \vec{x}_2, \theta_1 = \theta_2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^{x_1=0} \vec{x}_1 = \frac{2P}{\pi D} \vec{x}_1$$

Aussi peut-on déterminer la contrainte à rupture du matériau en traction en fonction de l'effort de compression appliqué sur le cylindre au moment de la rupture. Lorsque la rupture s'est initiée au niveau des appuis, le résultat n'est pas valable.

Pour un matériau hétérogène comme le béton, les ruptures s'amorcent souvent sur des hétérogénéités (granulats, porosité) au niveau de la section centrale. Aussi obtient-on la plupart du temps des résultats valides. En revanche si le matériau est très homogène (ex. un verre) la rupture s'initie presque systématiquement sous les appuis.



(a)

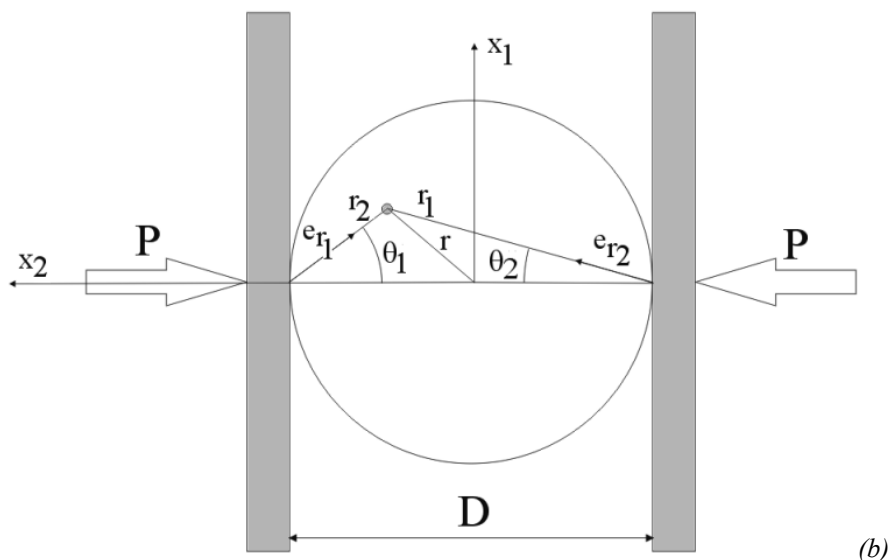


Figure 111 : (a) cliché pris lors d'un essai brésilien sur béton, (b) système de coordonnées pour cet essai.

◇ Essai de flexion trois points

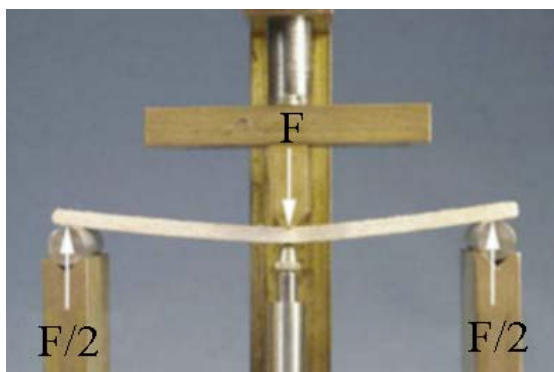


Figure 112 : Essai de flexion 3 points.

Pour des matériaux très homogènes tels que des verres ou des céramiques industrielles, l'essai brésilien n'est pas toujours approprié. On peut alors réaliser des essais de flexion trois ou quatre points. L'inconvénient de ces essais est que la contrainte varie dans la section où se propage la fissure. En effet, dans le cas d'un essai de flexion 3 points par exemple, la contrainte est maximale et compressive au niveau de la surface située sous l'appui ($\sigma = -\sigma_{max}$) puis augmente linéairement jusqu'à atteindre sa valeur maximale sur l'autre face ($\sigma = \sigma_{max}$). Il faut donc s'assurer que la fissure s'est bien initiée au niveau de la surface pour relier l'effort F appliqué sur l'éprouvette au moment de la rupture à la contrainte à rupture du matériau en traction.

Ainsi au niveau de la section centrale de la poutre : $\sigma_{xx} = \frac{3.F.L}{2eh^2} \left(\frac{y}{h} \right)$, où x est l'axe de la poutre,

F , l'effort appliqué sur l'appui central, e , l'épaisseur de la poutre et h , sa hauteur.

7.2.2 Essais de fissuration

◇ Essai Charpy

On peut également caractériser le comportement à la rupture d'une éprouvette contenant un défaut. Ce type d'essai permet de s'affranchir plus ou moins de la dispersion caractérisant la phase d'amorçage des défauts. Dans cette catégorie, l'essai le plus ancien (1901) et le plus pratiqué dans le monde est l'essai Charpy, du nom de son inventeur.

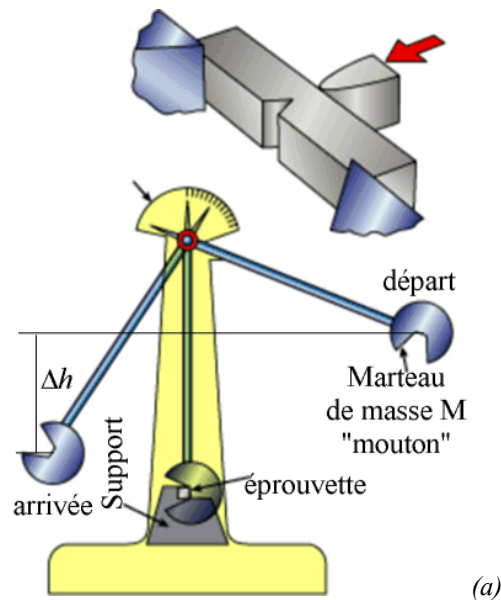
L'essai Charpy a pour but de déterminer la résistance aux chocs des matériaux. On mesure ce que l'on appelle leur **résilience**, c'est-à-dire l'énergie consommée pour rompre une éprouvette de référence de section égale à 1 cm^2 en utilisant un « mouton-pendule » (Figure 113 a).

L'éprouvette de référence utilisée est un barreau de longueur 55 mm, à section carrée de dix par dix millimètres et entaillée sur une profondeur de 5 mm. L'entaille peut revêtir diverses formes : en U ou, le plus souvent, en V. Comme il ne s'agit pas d'une fissure parfaite mais d'une entaille, on peut observer une dispersion des résultats liée à la nucléation d'une fissure principale au fond de l'entaille.

L'énergie consommée pour rompre le barreau est mesurée en faisant la différence d'énergie potentielle entre la hauteur de chute du « mouton » et celle à laquelle il remonte après avoir rompu le barreau. Si ce dernier était complètement fragile, le « mouton » remonterait à la même hauteur que celle d'où il a chuté ; s'il était au contraire extrêmement tenace, il ne serait pas rompu et le pendule ne remonterait pas du tout. L'énergie de rupture ainsi déterminée s'appelle la résilience. Plus elle est élevée, plus le matériau est tenace.

Ainsi la résilience, généralement notée K_{CV} se calcule comme suit :
$$K_{CV} \left(J / \text{cm}^2 \right) = \frac{M \cdot g \cdot \Delta h}{1 \text{ cm}^2}$$

Attention : si l'on utilise une éprouvette dont la section est double de celle de référence l'énergie à fournir ne sera pas double, car l'éprouvette est entaillée et il faut tenir compte de l'existence du défaut initial. Or ce défaut n'est pas vraiment une fissure, donc le concept de facteur d'intensité des contraintes n'est pas non plus directement applicable. Cette mesure est donc essentiellement qualitative.



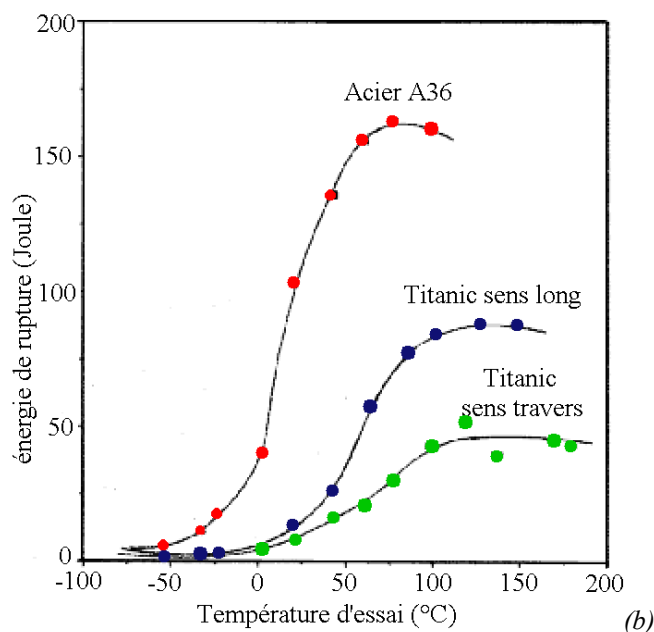


Figure 113 : (a) principe de fonctionnement du « mouton » Charpy. (b) Mesure de la résilience en fonction de la température, sur un acier actuel (A36) de même composition chimique (mais de meilleure qualité) que l'acier employé pour la réalisation de la structure de la coque du Titanic.

La grande simplicité de l'essai en fait, en partie, le succès. Il est susceptible de divers aménagements. Les mesures se font souvent à diverses températures, notamment à basses températures. Cependant, si la simple mesure de la résilience n'est pas compliquée, elle ne procure que des informations qualitatives et ne peut pas être utilisée directement dans un modèle pour dimensionner une structure. En revanche elle permet de classer les matériaux ou d'étudier la dépendance de la résilience à la température par exemple.

Lorsque l'énergie consommée par la rupture est grande, on dira que la rupture est ductile, en revanche lorsque cette énergie est faible on parlera de rupture fragile. Dans les métaux de structure cubique centrée (aciers par ex.) on observe une transition ductile-fragile lorsqu'on abaisse la température. Sur les aciers de bonne qualité, la transition se produit à basse température (-30°C à -50°C) mais lorsque la qualité de l'acier est médiocre cette transition peut être observée autour de la température ambiante.

C'est ce qui explique par exemple les conséquences dramatiques de l'impact d'un iceberg sur la coque du Titanic. L'acier, de qualité médiocre, présentait une transition ductile fragile aux alentours de la température ambiante (Figure 113 b). Lors du choc le métal s'est rompu de manière fragile, comme du verre.

◇ Essais de ténacité

Pour obtenir des données quantitatives, que l'on peut utiliser pour le dimensionnement, on utilise des éprouvettes fissurées et pas simplement entaillées comme dans le cas de l'essai Charpy. En pratique, on usine dans l'éprouvette une entaille aussi proche que possible d'une fissure (par électroérosion par exemple). Puis on applique des cycles de fatigue à cette éprouvette afin de faire se propager une véritable fissure depuis l'entaille.

Ensuite on applique un chargement croissant à l'éprouvette jusqu'à obtenir la propagation instable de la fissure qui conduit à la rupture (Figure 114 a). On mesure également le déplacement relatif des points d'application de l'effort afin de vérifier que le comportement de la structure fissurée reste bien linéaire jusqu'à la rupture. Si le comportement est linéaire, les concepts de mécanique de la rupture linéaire s'appliquent. Alors, connaissant la relation entre l'effort appliqué sur l'éprouvette et le facteur d'intensité des contraintes pour diverses géométries de fissure et d'éprouvettes, on en déduit le facteur d'intensité des contraintes qui conduit à la rupture brutale ou ténacité (K_{IC}).

En général il est observé que le facteur d'intensité des contraintes pour lequel on obtient la rupture dépend de l'épaisseur de l'éprouvette. Lorsque cette épaisseur devient très petite devant les dimensions de la fissure, le facteur d'intensité des contraintes à la rupture augmente. Le terme de ténacité (K_{IC}) est

réservé au cas des pièces épaisses. Lorsque les pièces sont minces, la fissure se propage en mode mixte (mode III, mode I).

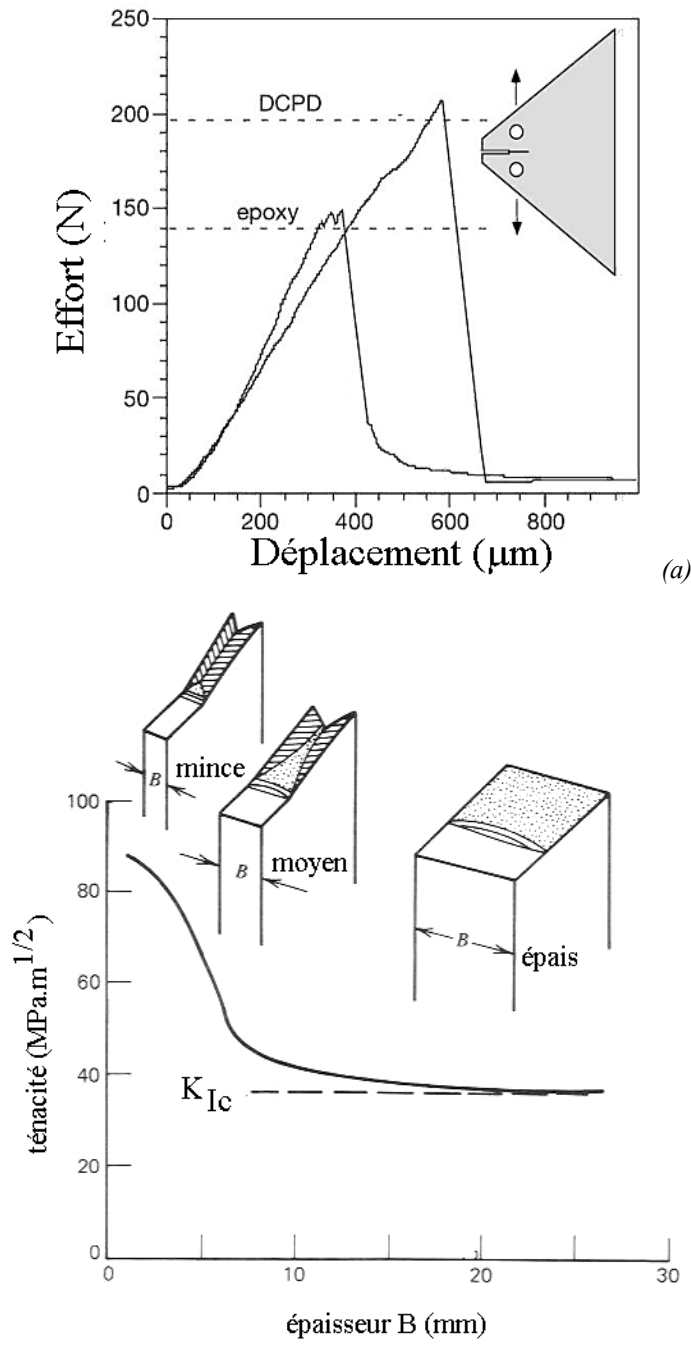


Figure 114 : (a) exemple d'essai de ténacité sur une éprouvette fissurée. On mesure la courbe effort appliqué-déplacement des points d'application de l'effort. La fissure s'ouvre sans se propager puis brutalement se propage jusqu'à la rupture lorsque $K=K_{Ic}$. (b) le facteur d'intensité des contraintes critique pour lequel la fissure se propage de manière instable dépend de l'épaisseur de l'éprouvette, K_{Ic} correspond au cas d'une éprouvette épaisse (déformation plane) (J. Besson).

7.3 Mécanismes d'endommagement

7.3.1 Rupture fragile

◇ Cas des métaux

Lorsque la rupture d'un métal est fragile on observe généralement un site d'amorçage unique sur un défaut à partir duquel se propage une fissure principale par clivage jusqu'à la rupture de la pièce. Parfois la fissuration peut aussi être intergranulaire si le matériau a été fragilisé au niveau des joints de grains (corrosion, fragilisation par la diffusion de métaux liquides...). En général le plan moyen de la rupture est normal à la direction de la plus grande contrainte principale de traction.

Le clivage consiste à séparer les plans atomiques du cristal. Il se produit systématiquement selon les plans denses du cristal qui sont aussi ses plans de plus grande équidistance c'est-à-dire entre lesquels la cohésion est la plus faible. On observe alors des facettes transgranulaires sur la surface de rupture.

Lors d'une rupture fragile, le comportement macroscopique du métal reste élastique.

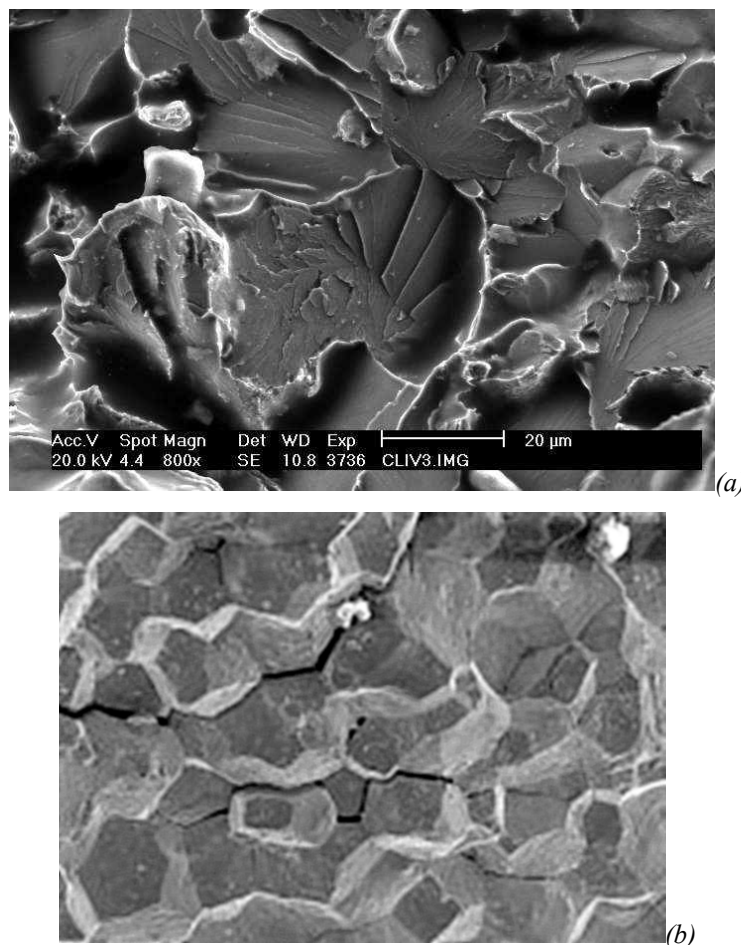


Figure 115 : (a) surface de rupture d'un acier par clivage. (b) surface de rupture intergranulaire fragile d'un acier.

◇ Cas des verres

Dans le cas des verres, qui sont amorphes, la rupture fragile se produit le plus souvent depuis un défaut superficiel (ex. rayure, petit impact) et se propage perpendiculairement à la direction de la plus grande contrainte principale positive. La surface de rupture fait apparaître trois zones, une zone miroir autour du site d'amorçage de la fissure, puis une zone de transition dans laquelle peuvent exister des fissures secondaires et enfin une zone finale dont la surface est moins plane.

Ces transitions proviennent du fait que la vitesse de la fissure augmente au cours de la rupture brutale, lorsque la vitesse de propagation commence à s'approcher de la vitesse de propagation des ondes mécaniques (vitesse du son dans le verre) des phénomènes dynamiques se produisent qui modifient la propagation de la fissure.

Mais pour l'essentiel, la rupture fragile des verres consiste en un amorçage sur un défaut superficiel suivi de la propagation d'une fissure principale jusqu'à la rupture.

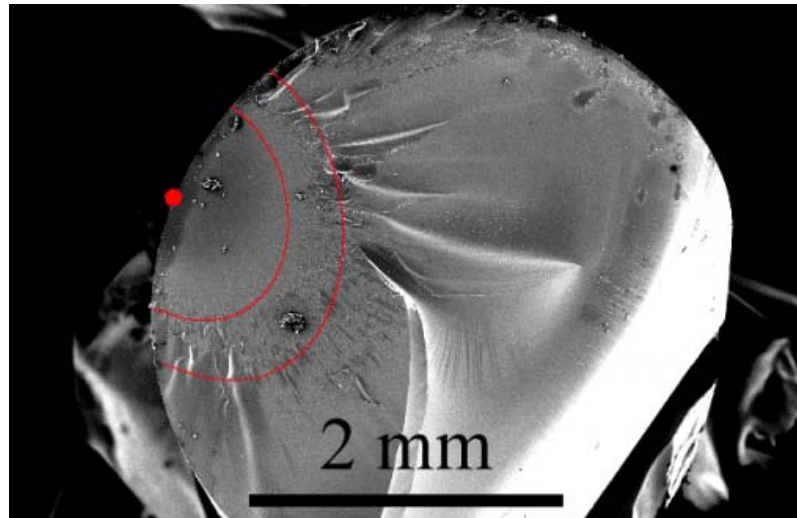
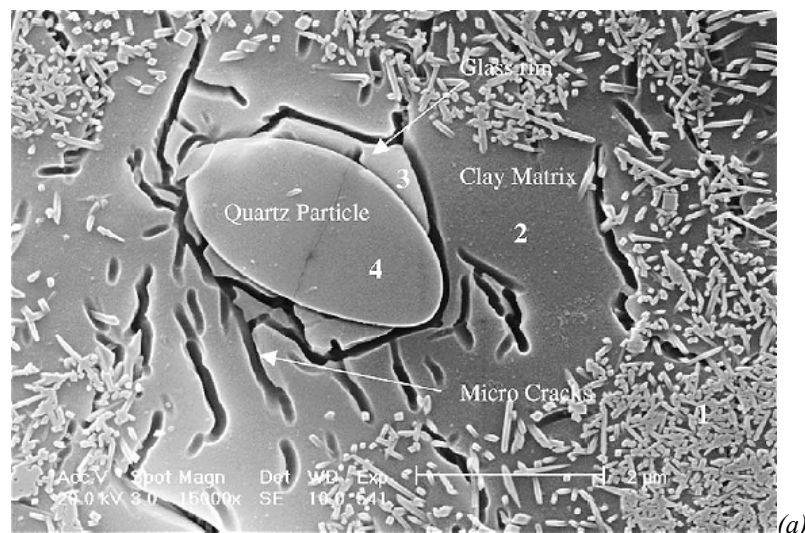


Figure 116 : surface de rupture d'un barreau de verre.

◇ Cas des céramiques

Le cas des céramiques est assez différent des métaux et des verres. La plupart du temps les céramiques sont très hétérogènes et contiennent de nombreuses microfissures entre les divers constituants. Aussi, lorsque le matériau est sollicité en traction, de nombreuses fissures sont sollicitées simultanément, l'endommagement est plus diffus. La céramique (porcelaine, béton etc...) se fragmente plutôt que de présenter des ruptures franches. En outre les fissures peuvent se développer dans des plans d'orientation diverses lorsque la sollicitation est multiaxiale et pas seulement dans le plan normal à la direction de contrainte principale positive maximale.



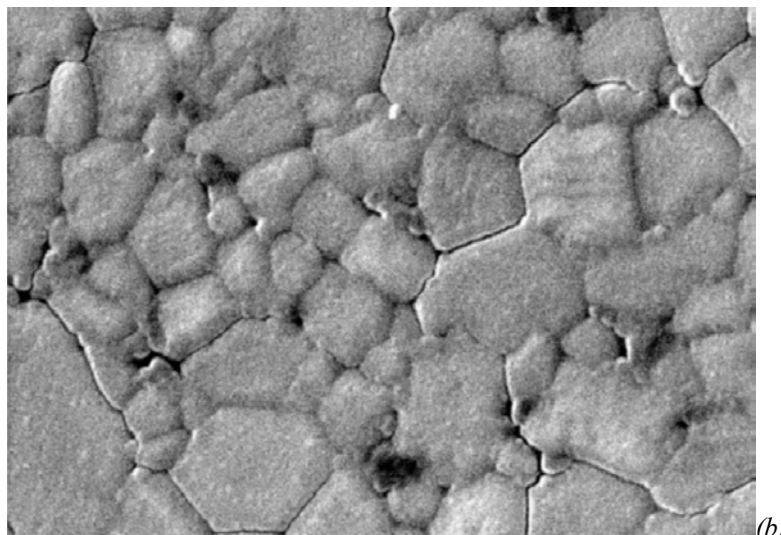


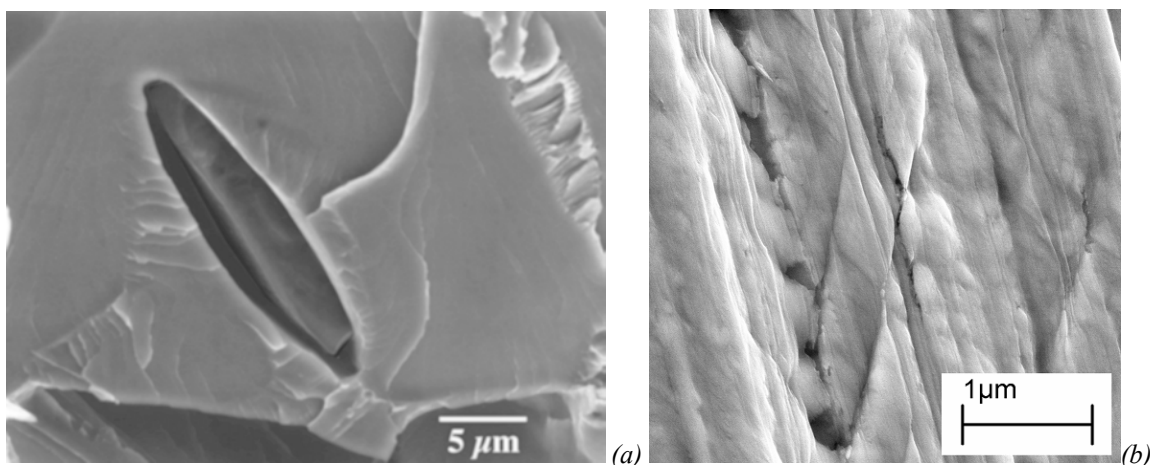
Figure 117 : (a) micrographie (R. Islam, R. Chan) d'une porcelaine industrielle (isolant électrique et thermique pour l'électronique). La porcelaine contient des particules de quartz et des aiguilles de mullite dans une matrice d'argile. La porcelaine est micro-fissurée autour des particules de Quartz du fait de différences de coefficients de dilatation thermique entre les deux phases. (b) céramique composites (alumine carbure de silicium) (Al_2O_3 -SiC) réalisés par frittage à chaud, microfissuration intergranulaire (A. Bellosi).

7.3.2 Rupture ductile

◇ Cas des métaux

La rupture ductile dans le cas des métaux est un mécanisme d'endommagement très différent de la rupture fragile. En premier lieu, c'est un mécanisme qui se produit lorsque le métal est macroscopiquement en plasticité. En outre, c'est un mécanisme d'endommagement diffus. De nombreuses cavités se développent sur des défauts, généralement des inclusions mais aussi des précipités ou bien aux joints de grains ou encore éventuellement sur des intersections de lignes de glissement intenses. Par exemple, sur la Figure 118 (a), on peut voir que lors d'un essai de traction réalisé sur une éprouvette extraite de la coque du Titanic, la matrice s'est décollée d'une très grosse inclusion de Sulfure de Manganèse.

Ensuite, du fait de la déformation plastique, ces cavités grossissent (Figure 118 (b)) puis coalescent. Les cavités formées par coalescence ont alors un volume beaucoup plus grand. Elles même grossissent sous l'effet de la déformation plastique puis coalescent à nouveau. Ainsi le même mécanisme de coalescence se produit plusieurs fois à partir de cavités de tailles différentes, ce qui donne aux surfaces de ruptures ductiles des métaux un aspect fractal très caractéristique (Figure 118 (d)).



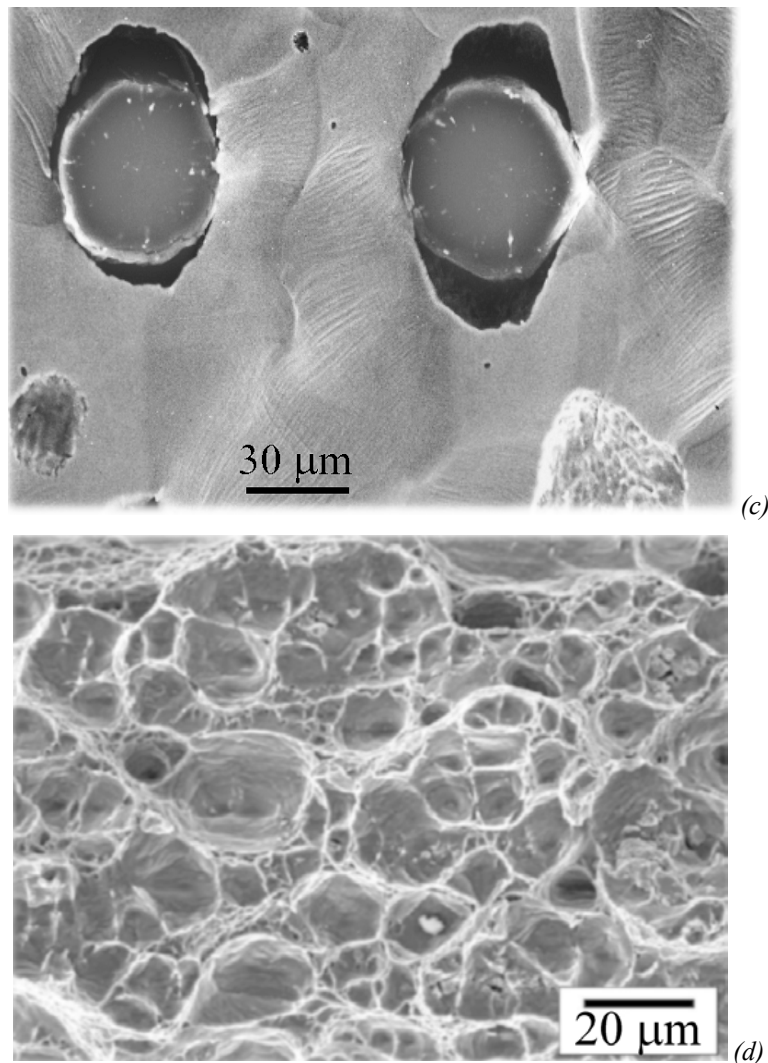


Figure 118 : (a) détail d'un début d'endommagement sur une très grosse inclusion de sulfure de manganèse dans l'acier du Titanic. (b) cavités à l'intersection de bandes de glissement intenses et d'un joint de grain sur un fil tréfilé de renfort de pneumatiques (A. Phelippeau) (c) Croissance de cavités (coupe métallographique) autour de nodules de graphite dans une fonte ductile à graphite sphéroïdal (M. Dong) (d) faciès de rupture typique d'une rupture ductile, des cavités s'amorcent sur des inclusions, croissent autour de l'inclusion puis coalescent (J. Besson)

◇ Cas des polymères thermoplastiques

Dans les polymères thermoplastiques, on assiste aussi souvent à l'apparition d'un endommagement diffus ou « crazing ». Une « craze » est une microfissure entre les faces de laquelle existent de nombreux ponts constitués de fibrilles de polymère. Lors de la déformation du polymère, certaines zones autour de défauts ou de particules de renfort sont des concentrations de contraintes. La déformation dans ces zones conduit à l'arrangement des chaînes macromoléculaires sous forme de fibrilles, progressivement une « craze » se forme.

Par la suite le mécanisme qui conduit à la rupture ressemble à celui de la rupture ductile des métaux, les « craze » coalescent, puis se développent de nouveau, jusqu'à la rupture.

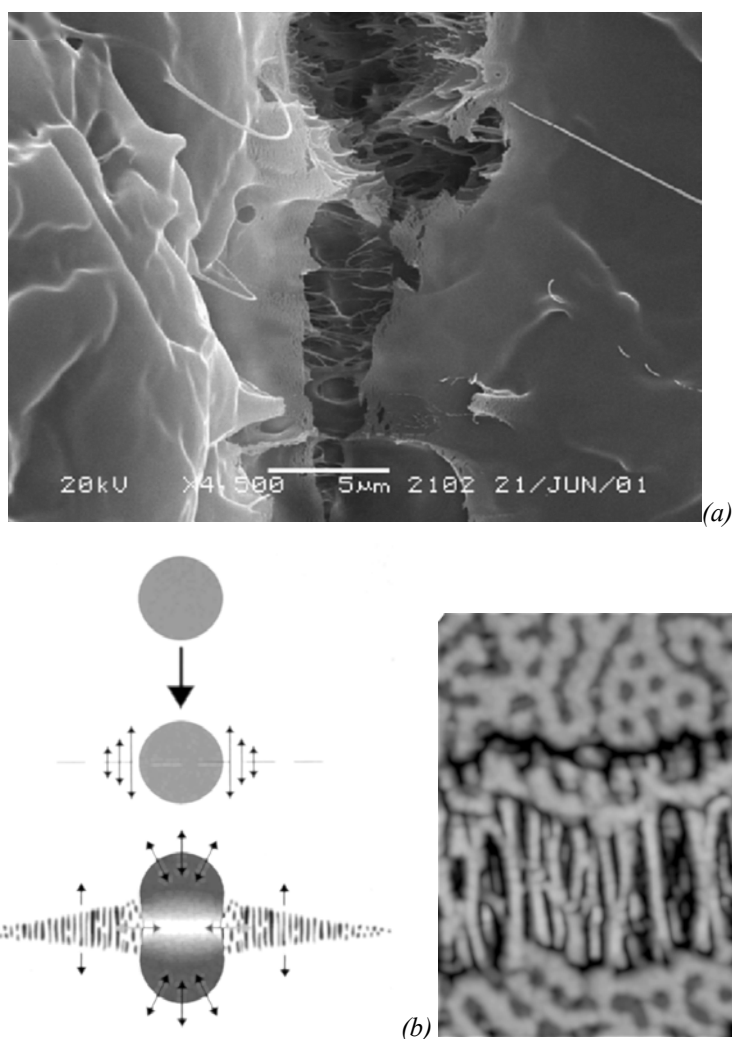


Figure 119 : (a) détail d'un « craze » autour de la rupture d'un polymère thermoplastique. (b) mécanisme de formation de « craze » autour d'inclusion d'élastomère dans un composite matrice de polymère thermoplastique-renfort par des particules d'élastomère. (c) détail, topographie de surface dans la zone de « crazing » avant rupture par microscopie à force atomique.

7.4 Eléments de modélisation

On a vu que selon les cas, l'endommagement conduisant à la rupture était soit diffus (avec ou sans déformation plastique) soit très localisé. Ces deux catégories sont associées à des modélisations très différentes.

Lorsque l'endommagement est localisé, la rupture s'initie généralement sur un défaut, plus sévère que les autres. Les contraintes à rupture sont alors distribuées statistiquement selon la nocivité des défauts contenus par les éprouvettes. Il faut alors traiter la rupture à travers une approche statistique.

Lorsque l'endommagement est diffus, la rupture se produit par coalescence de micro-fissures ou de cavités, que le comportement du matériau soit élastoplastique (cas des métaux) ou reste élastique (cas des céramiques qui se fragmentent). Dans ce cas, les contraintes à rupture sont moins dispersées car c'est l'interaction de l'ensemble des défauts qui conduit à la rupture. D'autre part, l'endommagement est progressif et diffus, ce qui permet d'utiliser une théorie d'endommagement fondée sur les concepts de la mécanique des milieux continus.

Enfin dans de nombreux cas, un même matériau peut présenter une transition entre un comportement ductile ou fragile en fonction de la vitesse de sollicitation ou en fonction de la température.

7.4.1 Endommagement localisé, Théorie du maillon faible

◇ Introduction

Pour qu'une fissure conduise à la rupture, il faut d'une part créer cette fissure à partir d'un défaut puis que la fissure se propage.

Il existe une contrainte seuil pour la nucléation d'une fissure sur un défaut (fragmentation d'une inclusion, décohésion de l'interface inclusion matrice, micro-plasticité conduisant à la formation d'une cavité sur un joint de grain etc...).

Puis, schématiquement, si le facteur d'intensité des contraintes K_I de la fissure qui vient d'être nucléée atteint K_{IC} le facteur d'intensité des contraintes critique alors la fissure se propage instantanément de manière instable jusqu'à la rupture. Si K_{IC} est très faible, soit du fait de la nature du matériau, soit du fait de la dimension des défauts qu'il contient, la rupture se produira donc à partir du premier défaut sur lequel est apparue une fissure. Ce défaut pourra être considéré comme le maillon faible du matériau.

En revanche si le seuil nucléation de la fissure est tel que le facteur d'intensité des contraintes reste bien inférieur à K_{IC} , la fissure ne conduira pas immédiatement à la rupture, elle pourra se déformer, si le comportement du matériau est élasto-plastique et former une cavité, ou bien se propager si le comportement du matériau est essentiellement élastique, tandis que d'autres fissures se développent ailleurs dans le matériau sur d'autres défauts. Dans ce cas, même si l'on rompt un maillon, la pièce n'est pas complètement rompue et la théorie du maillon faible ne s'applique pas.

La compétition entre le seuil de nucléation et le seuil de propagation instable de la fissure permet d'expliquer les transitions d'un endommagement diffus vers un endommagement localisé lorsqu'on augmente la vitesse de déformation ou lorsqu'on abaisse la température.

◇ Théorie de la rupture fragile de Griffith et ténacité K_{IC}

Vers 1920, Griffith fut le premier à proposer une théorie permettant d'expliquer la propagation instable d'une fissure.

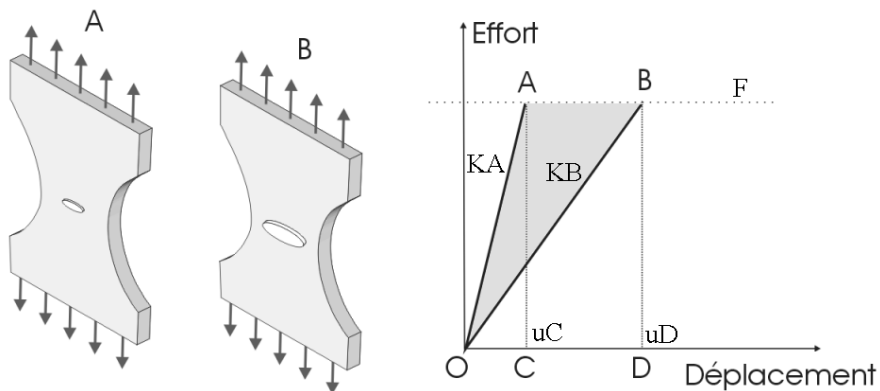


Figure 120 : Illustration : rigidité de deux structures fissurées.

Supposons deux éprouvettes fissurées dont on mesure la rigidité à savoir le rapport entre l'effort appliqué et le déplacement mesuré. Si l'une des éprouvettes (A) contient une fissure de longueur a_1 et l'autre éprouvette (B) une fissure de longueur a_2 avec $a_2 > a_1$, alors la rigidité de l'éprouvette B est plus faible que celle de l'éprouvette A (Figure 120).

Pour un effort donné F, l'énergie élastique stockée dans l'éprouvette B est l'aire du triangle OBD, tandis que celle stockée dans l'éprouvette A est l'aire du triangle OAC.

Lorsque une éprouvette est chargée et que la fissure se propage depuis une longueur a_1 jusqu'à une longueur a_2 sous un effort imposé F, l'énergie fournie W_{OABD} à l'éprouvette contient une part d'énergie élastique stockée W_{OBD} , une part d'énergie consommée W_R par l'extension de la fissure dans le matériau et une part d'énergie cinétique W_c . Soit ici :

$$W_R + W_C = W_{OABD} - W_{OBD} \text{ où } W_{OBD} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{K_B} = \frac{1}{2} C_B F^2 \text{ et } W_{OABD} = \frac{1}{2} C_A F^2 + F^2 (C_B - C_A)$$

Où C_B et C_A sont respectivement les complaisances des éprouvettes A et B c'est-à-dire les inverses des rigidités des éprouvettes A et B. En conséquence :

$$W_c + W_R = \frac{1}{2} (C_B - C_A) F^2$$

Et pour une extension infinitésimale de la fissure infinitésimale dA :

$$\frac{dW_c}{dA} + \frac{dW_R}{dA} = \frac{1}{2} \frac{dC}{dA} F^2$$

Si la fissure se propage de manière stable, quasi-statique, les effets inertiels sont négligeables ; la variation d'énergie cinétique est nulle. Dans ce cas, le taux de variation G de l'énergie élastique est exactement égal au taux d'énergie nécessaire à la création de surface unitaire notée $2\gamma_s$ (J/m²).

$$2\gamma_s = \frac{dW_R}{dA} = \frac{1}{2} \frac{dC}{dA} F^2 = G$$

Si G n'est pas exactement égal à $2\gamma_s$ alors l'énergie cinétique de la fissure est soit croissante, la fissure voit sa vitesse augmenter, soit décroissante, la fissure s'arrête. Ainsi $G_c = 2\gamma_s$ est le seuil au-delà duquel la fissure devient instable et en deçà duquel, lors d'un chargement monotone, la fissure ne se propage pas.

En appliquant les principes de la mécanique linéaire de la rupture, l'expression du taux de variation de l'énergie élastique par unité d'extension d'aire de fissure se calcule facilement en fonction du facteur d'intensité des contraintes :

$$G = \frac{K_I^2}{E} \text{ en contrainte plane et } G = \frac{(1-\nu^2)K_I^2}{E} \text{ en déformation plane}$$

Ainsi, la ténacité K_{IC} , correspond au facteur d'intensité des contraintes au-delà duquel la fissure se propage de manière instable et s'exprime de la façon suivante en fonction du taux d'énergie de création de surface :

$$K_{Ic} = \sqrt{2E} \sqrt{\gamma_s} \text{ en contrainte plane et } K_{Ic} = \sqrt{\frac{2E}{(1-\nu^2)}} \sqrt{\gamma_s} \text{ en déformation plane}$$

◇ Théorie du maillon faible : Statistique de Weibull

Si la ténacité du matériau est faible, où si le matériau contient des défauts de grande dimension, alors le seuil de nucléation d'une fissure pourra être supérieur au seuil de propagation instable de la fissure nouvellement créée. Dans ce cas la théorie du maillon faible s'applique. La première micro-fissure conduit à la rupture de toute la pièce.

Alors la rupture d'éprouvettes de volume donné est statistiquement distribuée du fait d'une probabilité de présence de défauts dans ce volume.

Weibull a proposé une expression de la probabilité de rupture d'un élément de volume sous une contrainte σ qui a la forme suivante :

$$P_R(\sigma) = 1 - \text{Exp} \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

La fonction choisie par Weibull donne une probabilité de rupture égale à zéro quant la contrainte est faible et une probabilité de rupture égale à 1 lorsque celle-ci est élevée. Lorsque $\sigma = \sigma_o$, la probabilité

de rupture est égale à $P_R(\sigma_o) = 1 - 1/e \approx 0.63$. Le coefficient m règle, quant à lui, la largeur de la distribution.

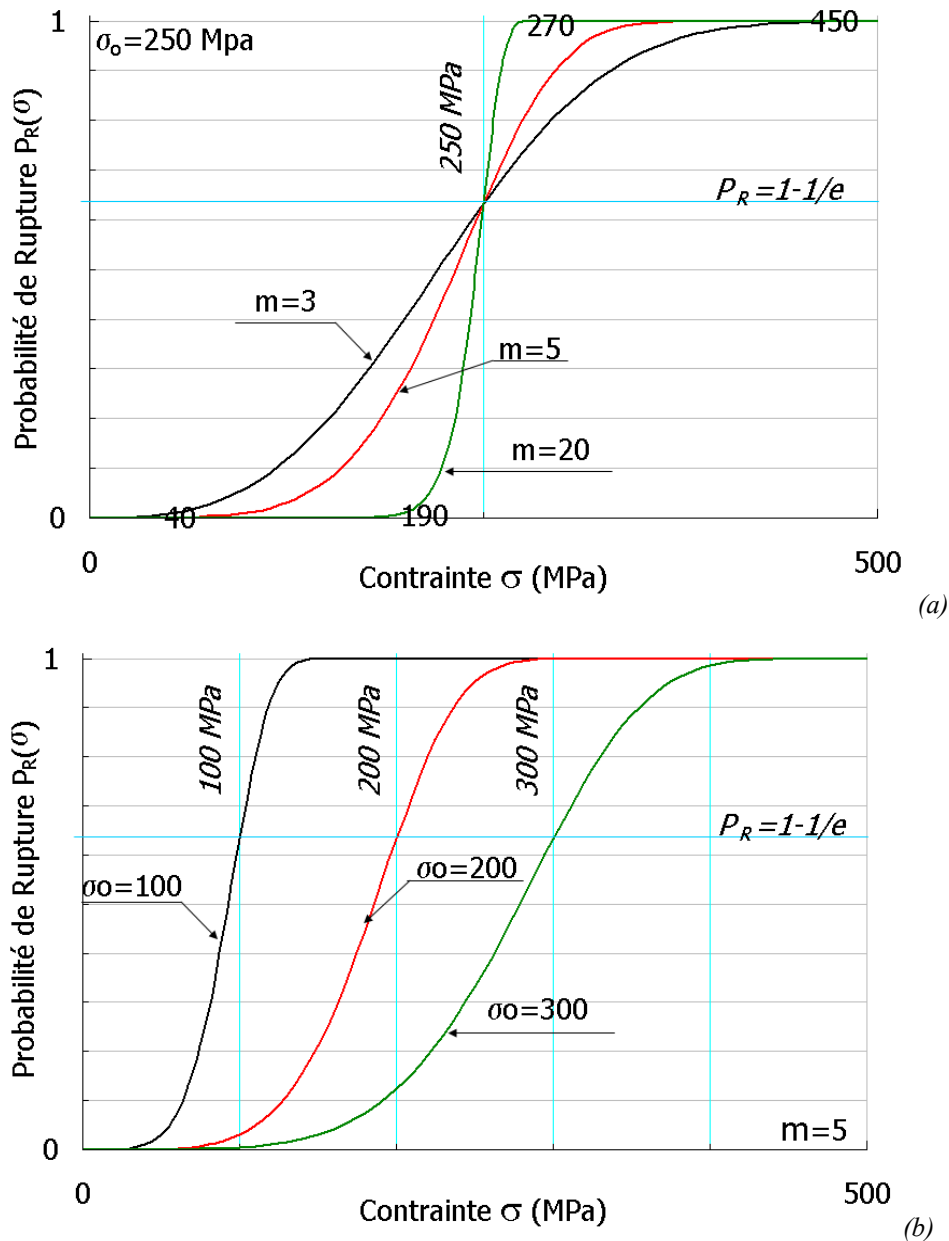


Figure 121 : Allure de la fonction $P_R(\sigma)$ choisie par Weibull pour représenter la probabilité de rupture d'un élément de volume en fonction de la contrainte subie par ce volume. (a) Illustration du rôle de m , $\sigma_o = 250$ MPa, si $m=20$, toutes les pièces cassent entre $\sigma = 190$ MPa et $\sigma = 270$ MPa, la dispersion est faible, si $m=3$, les pièces cassent entre $\sigma = 40$ MPa et $\sigma = 450$ MPa, la dispersion est élevée. (b) le coefficient σ_o permet de régler la contrainte aux alentours de laquelle se produisent les ruptures.

◇ Identification des paramètres m et σ_o .

Pour identifier les paramètres m et σ_o de la loi de Weibull, il faut dans un premier temps réaliser de nombreux essais de rupture. On dispose alors des probabilités de rupture pour chaque niveau de contrainte atteint dans les essais. Tracer ces résultats dans un diagramme de Weibull (Figure 122) permet d'une part de vérifier que le modèle de Weibull s'applique bien à la rupture du matériau étudié et d'autre part d'identifier les paramètres m et σ_o .

En effet compte tenu de la forme de la fonction de Weibull, si on la trace dans un diagramme dit de Weibull, on doit obtenir une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine $m \cdot \ln(\sigma_o)$:

$$P_R(\sigma) = 1 - \text{Exp}\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^m\right] \Rightarrow \text{Ln}[-\text{Ln}[1 - P_R(\sigma)]] = m \text{Ln}[\sigma] - m \text{Ln}[\sigma_o]$$

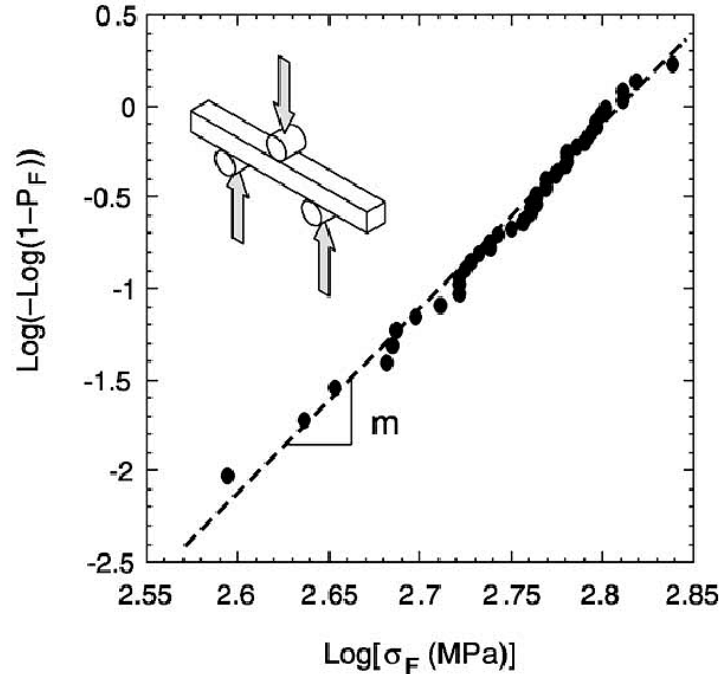
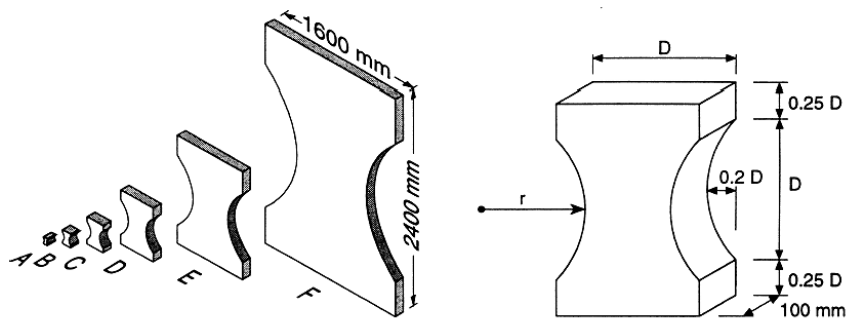


Figure 122 : Exemple de tracé de résultats expérimentaux dans un diagramme de Weibull. On note que les points s'alignent bien sur une droite dont la pente permet de déterminer le coefficient m . (F. Hild)

◇ Effet d'échelle associé à la théorie du maillon faible.

En réalité beaucoup de fonctions mathématiques permettent de représenter une probabilité de rupture, passant de 0 pour de faibles contraintes à 1 pour de fortes contraintes et présentant une transition autour d'un niveau de contrainte intermédiaire. L'intérêt de la fonction proposée par Weibull est qu'elle permet facilement de traiter les effets d'échelle observés dans les matériaux fragiles.



Type	A	B	C	D	E	F
D (mm)	50	100	200	400	800	1600
r (mm)	36.25	72.5	145	290	580	1160

(a)

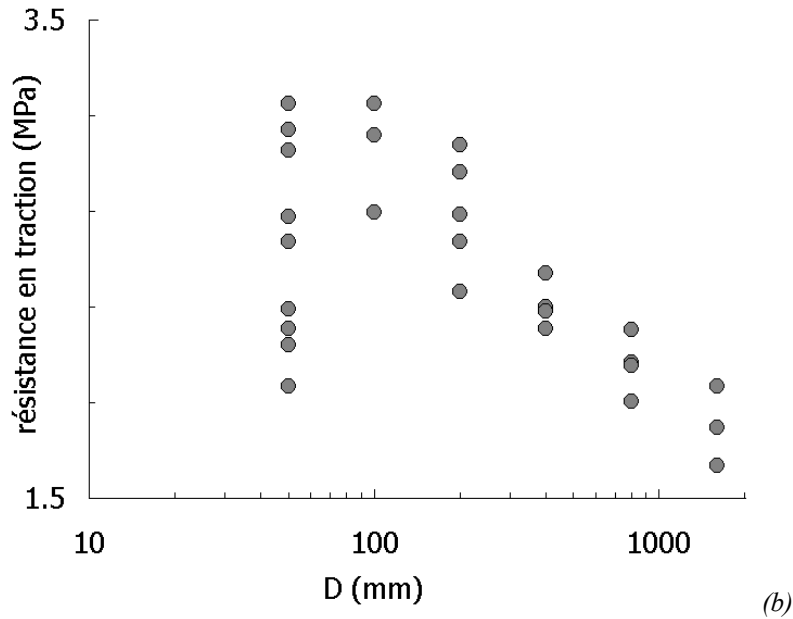


Figure 123 : Illustration de l'effet d'échelle sur un béton. (a) Eprouvettes utilisées, (b) contraintes à rupture mesurée sur les éprouvettes en fonction de leur taille. Plus l'éprouvette est petite, plus la dispersion des résultats est grande mais plus la contrainte moyenne à rupture est élevée (Van Vliet).

On observe généralement que plus le volume de matière testé est petit plus les contraintes à rupture sont dispersées et plus la contrainte moyenne de rupture est grande (Figure 123). En effet plus le volume de matière est grand plus la probabilité de rencontrer un défaut nocif est grande.

Cet effet peut aisément être traduit à l'aide de la fonction de Weibull.

En effet imaginons que les paramètres m et σ_o aient été identifiés sur une éprouvette de volume V_o . Si l'on sollicite maintenant un volume de matière $V=N.V_o$ sous une contrainte homogène σ , la probabilité de non-rupture du volume V sera égale au produit des probabilités de chacun des sous-volumes V_o . En effet si la théorie du maillon faible s'applique, il suffit qu'un élément casse pour que l'ensemble casse.

$$\text{Soit : } P_R(\sigma)^V = 1 - P_V(\sigma)^V = 1 - \prod_{i=1}^N P_V(\sigma)^{V_o} = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - P_R(\sigma)^{V_o})$$

En remplaçant il vient :

$$P_R(\sigma)^V = 1 - \prod_{i=1}^N \text{Exp} \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^m \right] = 1 - \text{Exp} \left[- N \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

L'expression de la probabilité de rupture d'un volume V sollicité sous une contrainte homogène σ est donc finalement la suivante :

$$P_R(\sigma)^V = 1 - \text{Exp} \left[- \frac{V}{V_o} \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

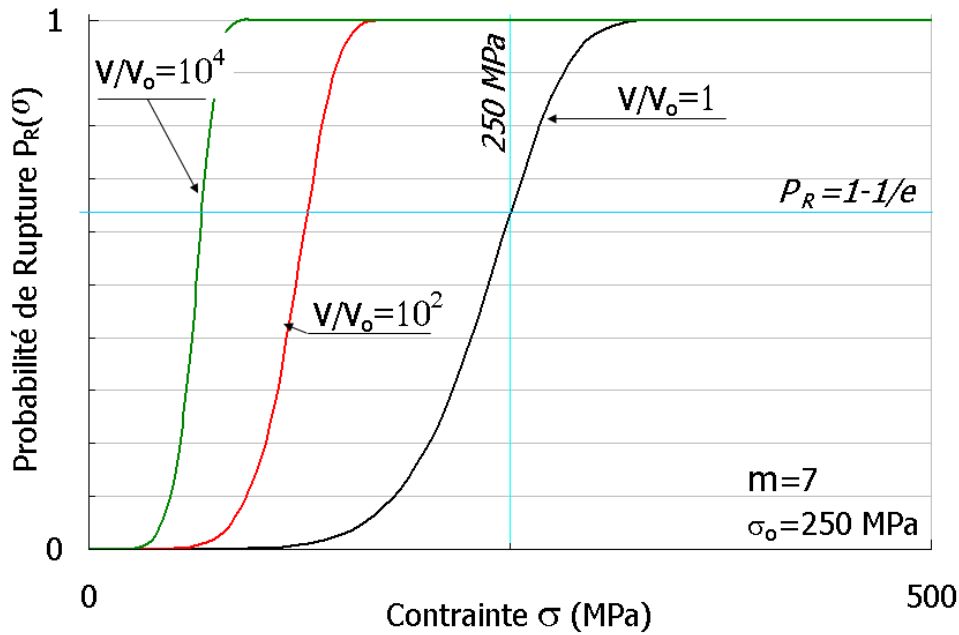


Figure 124 : Allure de la fonction $P_R(\sigma)^V$ avec effet d'échelle de Weibull, $m=5$, $\sigma_o=250$ MPa, on examine le rôle du volume de matière sollicité V/V_o .

◇ Effet d'un champ de contrainte non-homogène

Si maintenant le champ de contrainte n'est pas homogène dans la structure, il suffit de généraliser le raisonnement précédent. Supposons que le volume V soit constitué de sous volumes V_i soumis chacun à une contrainte σ_i , i variant de 1 à N . Alors la probabilité de rupture se calcule comme suit :

$$P_R^V = 1 - \prod_{i=1}^N \text{Exp} \left[- \frac{V_i}{V_o} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_o} \right)^m \right] = 1 - \text{Exp} \left[- \sum_{i=1}^N \frac{V_i}{V_o} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

En faisant maintenant tendre les sous-volumes vers zéro il vient :

$$P_R^V = 1 - \text{Exp} \left[- \int_V \frac{dV}{V_o} \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

Où σ est la contrainte principale maximale de traction en un point. Si une structure (éprouvette de flexion, pièce complexe...) reste élastique, il est en général possible d'exprimer la contrainte en un point en fonction de la contrainte maximale dans la pièce. On introduit alors la notion de volume effectif pour une structure :

$$V_{eff} = \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_{max}} \right)^m dV$$

Alors la probabilité de rupture s'écrit :

$$P_R^V = 1 - \text{Exp} \left[- \frac{V_{eff}}{V_o} \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_o} \right)^m \right]$$

Prenons par exemple une poutre de longueur L à section rectangulaire de hauteur h et de largeur b , soumise à un moment de flexion M . Alors σ_{max} , la contrainte maximale dans la poutre, et σ , la contrainte en un point distant de y de l'axe de la poutre, se calculent comme suit :

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh}{2I} \quad \sigma = \frac{My}{2I} \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

La contrainte n'est positive que dans la partie supérieure de la poutre, alors :

$$V_{\text{eff}} = bL \int_{y=0}^{y=h/2} \left(\frac{2y}{h}\right)^m dy = \frac{b.h.L}{2m+2}$$

Dans une éprouvette de traction simple à section rectangulaire b.h et de hauteur L sollicitée en traction on trouve en revanche

$$V_{\text{eff}} = bhL$$

Aussi le changement d'échelle n'a-t-il pas le même effet sur la distribution des contraintes de rupture en traction et en flexion par exemple.

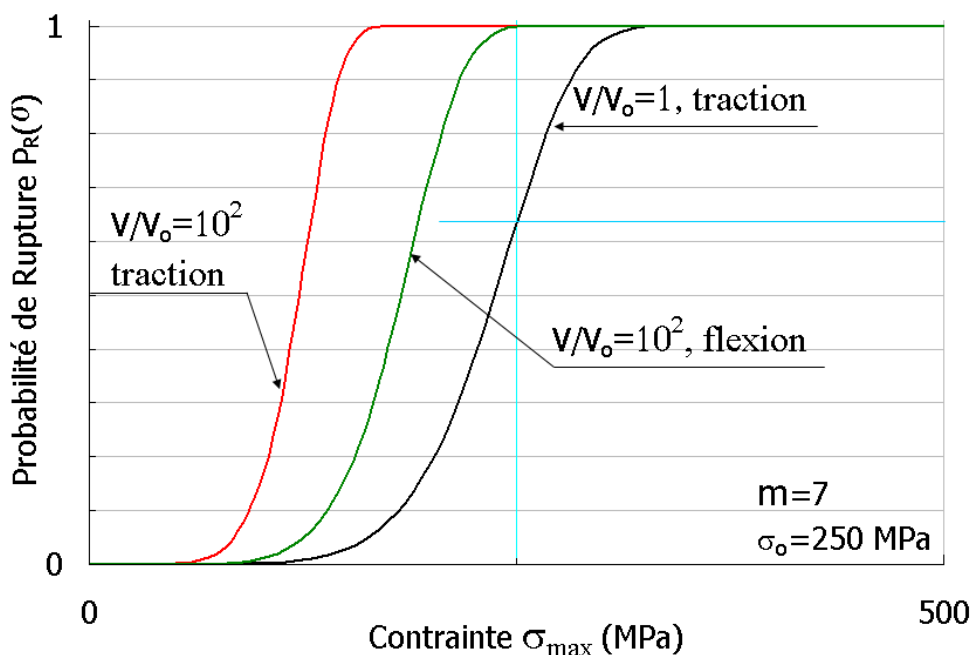


Figure 125 : Effet de la géométrie de l'éprouvette et du chargement sur la distribution des contraintes à rupture (exemple comparaison de la flexion et de la traction simple).

7.4.2 Endommagement diffus, Théorie de Kachanov

◇ Introduction

La théorie du maillon faible s'applique bien lorsqu'un unique défaut suffit à provoquer la rupture de la pièce. Mais lorsque la rupture se produit par croissance de cavités lors de la rupture ductile d'un métal (Figure 118) ou par la coalescence de nombreuses petites fissures lors de la rupture d'une céramique, les défauts doivent interagir pour pouvoir conduire à la rupture.

La mécanique élastique linéaire de la rupture permet de déterminer les facteurs d'intensité des contraintes fissures qui interagissent entre elles. Si l'on considère par exemple le cas de fissures périodiquement espacées sur un même plan, le facteur d'intensité des contraintes est connu et s'écrit comme suit :

$$K_I^{\text{périodique}} = \sigma \sqrt{w \tan \frac{\pi}{2} \frac{2a}{w}}$$

Tandis que celui d'une fissure de même longueur mais isolée dans un milieu infini s'écrit :

$$K_I^{isolée} = \sigma \sqrt{\pi a}$$

On peut remarquer que le facteur d'intensité des contraintes d'une fissure dans le réseau tend vers l'infini quand $D=2a/w$ tend vers 1 et vers zéro quand D tend vers zéro.

On peut se donner aussi une approximation du facteur d'intensité des contraintes qui tend également vers l'infini lorsque D tend vers 1 et vers zéro lorsque D tend vers zéro :

$$K_I^{approx} = \frac{\sigma}{1-D} \sqrt{\pi a} = \sigma_{eff} \sqrt{\pi a}$$

Ainsi une fissure dans un milieu endommagé (réseau de fissure) soumis à une contrainte σ se comporte en première approximation comme une fissure dans un milieu sain soumis à une contrainte effective $\sigma_{eff}=\sigma/(1-D)$.

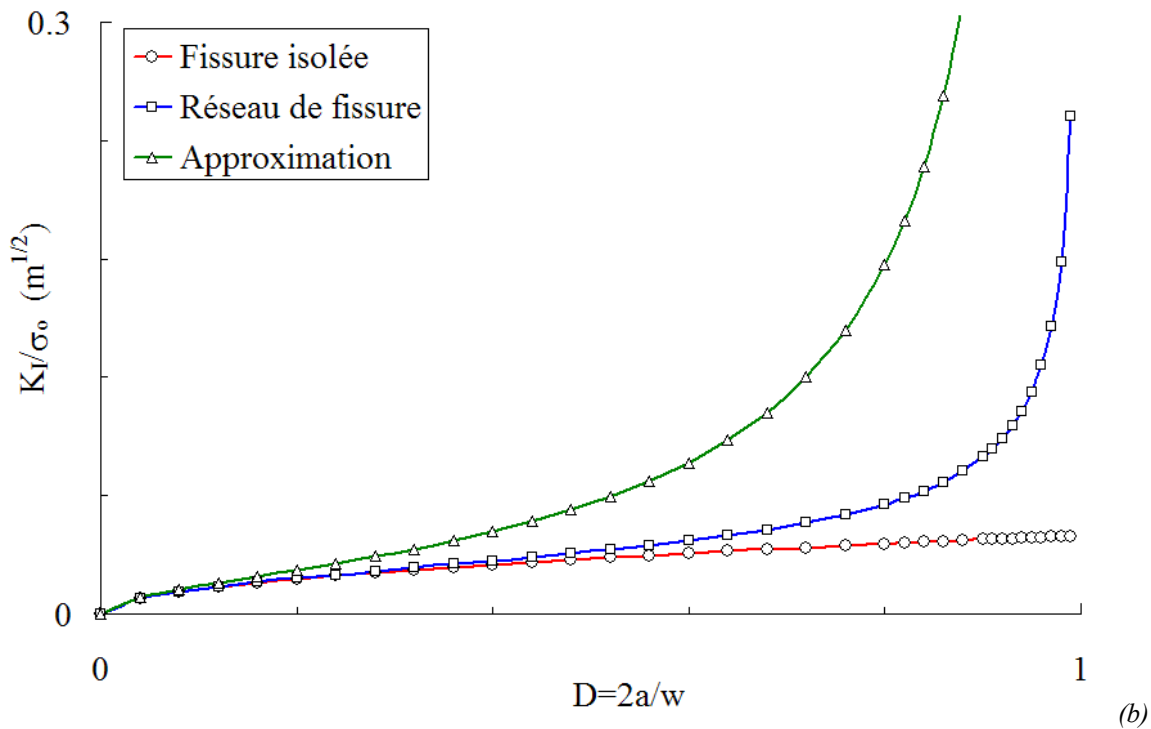
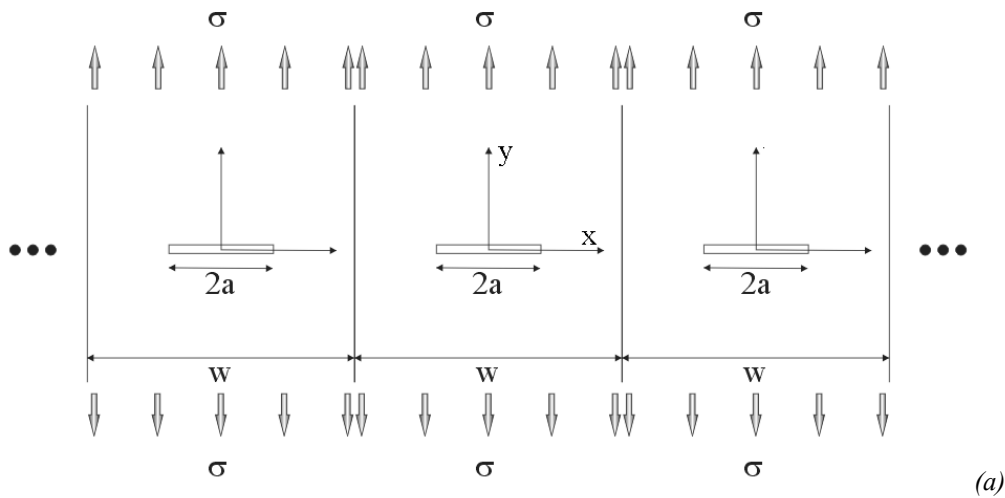


Figure 126 : (a) réseau de fissures alignée sur le plan ($y=0$). (b) Effet d'interaction entre fissures sur le facteur d'intensité des contraintes d'un réseau de fissure, cercles, le facteur d'intensité des contraintes d'une fissure isolée sous une contrainte σ , carrés, le facteur d'intensité des contraintes d'une fissure soumise à une contrainte σ dans un réseau de fissure, triangles, facteur d'intensité des contraintes pour une fissure isolée soumise à une contrainte $\sigma_{eff}=\sigma/(1-D)$.

◇ *Théorie de l'endommagement de Kachanov-Rabotnov, cas uniaxial*

Lorsque l'endommagement résulte du comportement collectif de défauts, croissance et coalescence avec interactions entre défauts, on pourra alors utiliser la mécanique de l'endommagement, initiée par les travaux de Kachanov et Rabotnov et développée par Lemaître et Chaboche en France.

Lorsque le matériau est endommagé, une section d'aire S à travers ce matériau, contient une aire S^* de vide. Ainsi l'effort appliqué F , se distribue sur une aire $S_{eff}=S-S^*$ de matière et non pas sur l'aire totale S . Ceci permet de définir une contrainte effective σ_{eff} . En chargement uniaxial il vient :

$$\sigma_{eff} = \frac{F}{S_{eff}} = \frac{F}{S} \frac{S}{S_{eff}} = \sigma \frac{S}{S-S^*} = \frac{\sigma}{1-D}$$

Pour effectuer des calculs sur le milieu endommagé, on peut alors utiliser les concepts de la mécanique des milieux continus, en ajoutant à l'ensemble des variables la variable d'endommagement D . On peut ainsi écrire d'une part la loi de comportement, qui lie contrainte et déformations, en uniaxial :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_D} = \frac{\sigma_{eff}}{E} \quad \text{avec} \quad E_D = E(1-D)$$

Et d'autre part la loi d'endommagement qui donne l'évolution de D , cette loi d'évolution dépend bien entendu du matériau et du mécanisme d'endommagement considéré :

Ainsi pour la rupture ductile, la vitesse de croissance de l'endommagement est liée à la déformation plastique d'une part, puisqu'il faut que le matériau se déforme plastiquement pour que les cavités croissent et à la pression hydrostatique d'autre part puisqu'il faut que le volume des cavités augmente pour que l'endommagement progresse. Il existe de nombreuses lois d'endommagement ductile. La formule suivante, par exemple, a été proposée par J. Lemaître (1987), A et b sont des paramètres à ajuster, E et ν le module d'Young et le coefficient de Poisson :

$$\frac{dD}{dt} = \left(\frac{Y}{A}\right)^b \frac{d\varepsilon_p}{dt} \quad \text{avec} \quad Y = \frac{\sigma_{eq}^2 \left(\frac{2(1+\nu)}{3} + \frac{3(1-2\nu)}{\sigma_{eq}^2} p^2 \right)}{2E} \quad \text{avec} \quad p = -\frac{Tr\sigma}{3}$$

Pour la rupture fragile des milieux multifissurés, comme par exemple des céramiques, des bétons, on parlera de comportement quasi fragile. La loi d'endommagement correspondra à la propagation de multiples fissures en mode I (contrainte principale de tension maximale).

◇ *Exemple : comportement quasi-fragile du béton*

On distingue clairement la phase d'endommagement diffus de la phase d'endommagement localisé dans une essai réalisé sur un matériau quasi-fragile comme du béton par exemple. Dans la phase d'endommagement localisé (propagation d'une fissure principale), l'effort appliqué sur une éprouvette de traction diminue lorsque le déplacement des mors de la machine augmente. En revanche dans la phase d'endommagement diffus, l'effort reste croissant même si la pente de la courbe contrainte-déformation est décroissante.

Lors de la phase d'endommagement diffus, si l'on effectue des cycles de charge-décharge, on peut observer la chute de module d'élasticité du matériau et en déduire ainsi à travers la théorie de Kachanov l'évolution de l'endommagement avec le niveau de contrainte appliqué.

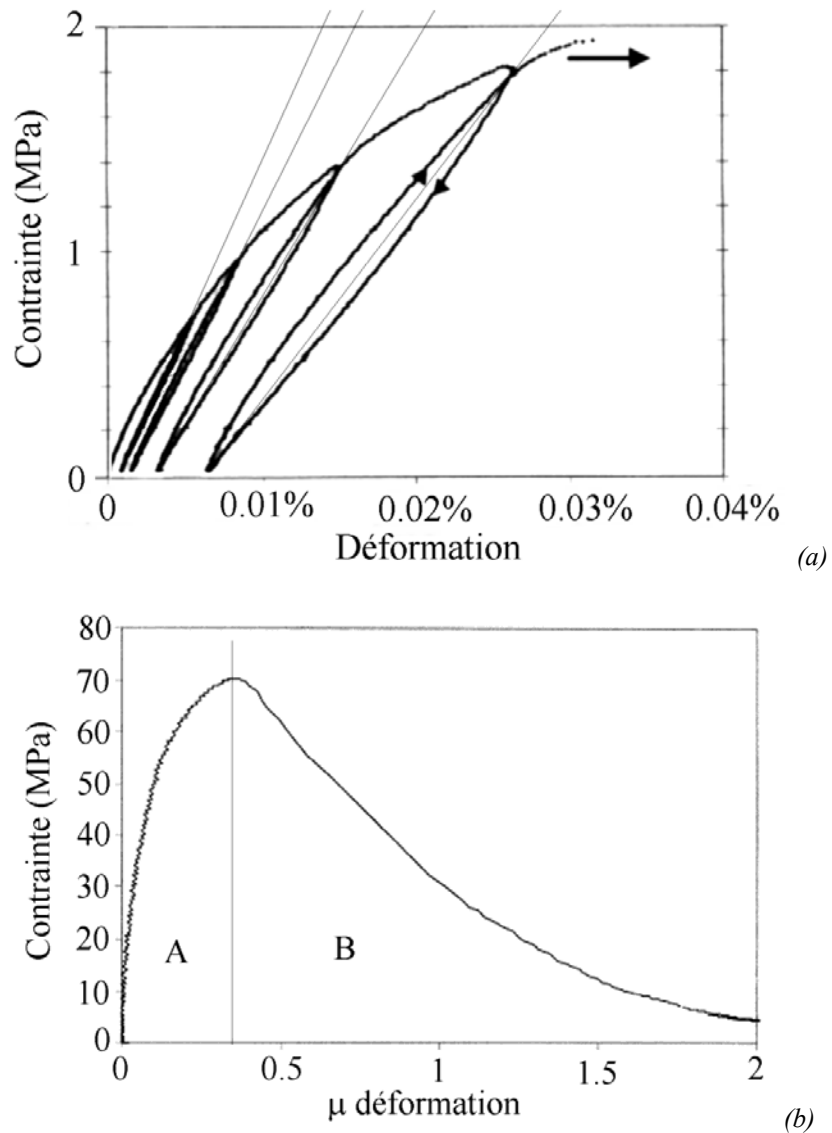


Figure 127 : Exemple d'essai de traction sur un matériau quasi fragile. Ici un béton réfractaire après un essai de feu à 1500°C. (a) La chute de module dans la phase d'endommagement diffus permet de déterminer la loi d'évolution de l'endommagement. (b) lors de l'essai complet, la phase **A** où la contrainte croît avec la déformation bien que la pente diminue correspond à la phase d'endommagement diffus, la phase **B** où la contrainte diminue correspond à la phase de propagation d'une fissure principale.

7.5 Résumé

Définitions :

- On distingue deux modes de rupture, une **rupture ductile** qui consomme beaucoup d'énergie par unité de surface de fissure créée et une **rupture fragile** qui n'en consomme pas ou peu.
- La **résilience K_{cv}** est l'énergie consommée lors de la rupture d'éprouvettes de référence de section égale à 1cm^2 au cours d'un essai Charpy. Bien qu'elle soit notée à l'aide de la lettre K il ne s'agit pas d'un facteur d'intensité des contraintes.
- La **ténacité K_{IC}** est le facteur d'intensité des contraintes pour lequel la rupture devient instable (la vitesse de fissuration augmente).

Endommagement :

- Endommagement diffus : beaucoup de défauts interagissent pour conduire à la rupture.
 - métaux ductiles, croissance et coalescence de cavités.
 - polymères ductiles, croissance et coalescence de « crazes ».
 - céramiques quasi-fragiles, croissances et coalescences de micro-fissures.
 - En général, consommation d'énergie importante pour la rupture.
 - En général, faible dispersion des contraintes à rupture.
 - Théorie de l'endommagement applicable en MMC.
- Endommagement localisé : une fissure principale se propage jusqu'à la rupture.
 - métaux fragiles, amorçage d'une fissure sur une inclusion, propagation par clivage d'une fissure principale.
 - verres : amorçage d'une fissure sur un défaut superficiel (rayure...) et propagation d'une fissure principale de manière fragile.
 - céramiques quasi-fragiles ou métaux ductiles, après la phase d'endommagement diffus propagation d'une fissure principale formée par coalescence de micro-fissures.
 - En général, consommation d'énergie pour la rupture assez faible.
 - En général, forte dispersion des contraintes à rupture et effet d'échelle.
 - Appliquer la théorie du maillon faible (Weibull)

7.6 Problèmes

7.6.1 Les aventures de Tintin

Objectifs : Rupture fragile, prise en compte de la probabilité de rupture (Weibull), application à une cloche de scaphandre.

Nous allons tenter de répondre, dans cet exercice, à une question que vous vous êtes sans doute posés en lisant les Aventures de Tintin : « Comment dimensionner les cloches de scaphandre de nos trois héros, Tintin, Milou et le capitaine Haddock ? »

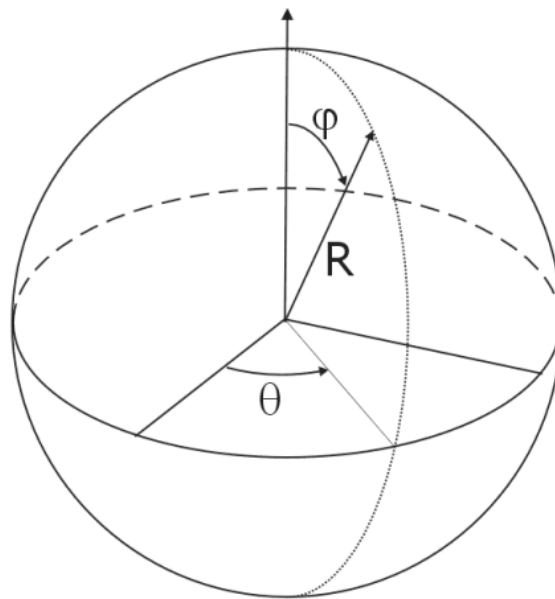


Figure 128 : Coordonnées sphériques

Ces cloches de scaphandre sont en verre, de forme hémisphérique, de rayon R et d'épaisseur e . Le verre est maintenu librement par un joint en caoutchouc sur sa partie inférieure et soumis à une différence de pression $\Delta P=0.1$ MPa (soit une atmosphère).

Les propriétés du verre employé pour la fabrication de ces cloches sont rassemblées dans le tableau ci-dessous. La rupture d'une des cloches de scaphandre pourrait provoquer un drame. Il s'agit donc de pièces critiques, pour lesquelles nous choisirons une probabilité de rupture de 10^{-6} .

Matériau	Module de Young	Contrainte à rupture moyenne en compression	Ténacité
Verre Sodique	$E=74$ GPa	$\sigma_R=1000$ MPa	$K_{IC}=0.7$ MPa.m ^{1/2}

◇ Question 1 : Mécanisme de rupture fragile

Une campagne d'essais sur 28 éprouvettes de traction en verre sodique a été réalisée pour caractériser le comportement à rupture du matériau. Les résultats de ces essais sont regroupés ci-dessous :

Contrainte à rupture d'éprouvettes (de volume V_0) sollicitées en traction simple (MPa)

Eprouvettes de diamètre $D=10$ mm et de longueur utile $L=1.5D$.

45	49	43	50	46	51	47
41	48	31	52	48.5	43.5	49.5
41.5	47.5	50.5	37	52.5	44	51.5
44.5	47.8	49.8	42.3	46.1	48.2	43.6

- Expliquez la dispersion des contraintes à rupture en traction pour le verre.
- Pour les matériaux fragiles, on observe un effet d'échelle : « plus le volume est grand, plus la contrainte à rupture est faible ». Comment peut-on justifier cette assertion à partir des mécanismes physiques de rupture ?

◇ *Question 2 : Loi de Weibull*

Etant donnée la grande dispersion des contraintes à rupture obtenue, nous ne parlerons plus d'une contrainte à rupture unique mais d'une probabilité de rupture du matériau $P_R(\sigma_R)$ sous une contrainte σ_R .

La probabilité de survie du matériau se calcule alors comme suit : $P_V(\sigma_R) = 1 - P_R(\sigma_R)$

Un ingénieur suédois, **Weibull**, a proposé la loi suivante pour estimer la probabilité de survie d'une éprouvette de volume V_0 d'un matériau fragile donné :

$$P_V(\sigma_i) = \exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right\}, \text{ où } \sigma_0 \text{ et } m \text{ sont deux paramètres caractéristiques du matériau.}$$

Cette expression n'est valable que pour représenter des résultats d'essais effectués sur des échantillons de même volume V_0 .

- A partir de l'expression proposée par Weibull, tracer la probabilité de survie $P_V(\sigma)$ en fonction de la contrainte σ .
- Commenter l'allure de cette courbe. Quelle signification peut-on donner à la contrainte σ_0 .
- Commenter également l'influence du paramètre m sur l'allure de cette courbe. Pour une même population de défauts, comment se classeront les valeurs de m pour un matériau ductile ou fragile. Pour un matériau fragile, dans quelles configurations peut-on avoir une contrainte à rupture très peu dispersée ?

◇ *Question 3 : Identification des paramètres de la loi de Weibull*

On cherche à identifier les paramètres σ_0 et m de la loi de Weibull à partir des résultats d'essai de traction donnés dans l'énoncé.

- Comment calculer la probabilité de rupture sous une contrainte donnée σ_R à partir des résultats expérimentaux ?
- Comment peut-on alors identifier simplement les deux paramètres de la loi de Weibull.

◇ *Question 4 : Manipulation de la Loi de Weibull*

On donne les valeurs des coefficients de la loi de Weibull pour le matériau étudié : $m=13$ et $\sigma_0=50$ MPa.

- Comment calculer la probabilité de rupture d'une pièce de volume V ($V \gg V_0$), soumise à une contrainte homogène ?
- Quelle est la contrainte maximale admissible pour une pièce de volume $V=V_0$, soumise à une contrainte homogène σ pour avoir une probabilité de rupture de 10^{-6} ?

- Quelle est la contrainte maximale admissible pour une pièce de volume $V=10 V_0$, soumise à une contrainte homogène σ pour avoir une probabilité de rupture de 10^{-6} ?
- Quelle est la contrainte à rupture moyenne du verre lors des essais de traction ? Quelle serait la contrainte à rupture moyenne pour des éprouvettes de volume $V=10 \cdot V_0$?

◇ *Question 5 : Application dimensionnement des cloches de scaphandre*

Exprimer la contrainte circonférentielle moyenne $\sigma_{\theta\theta}$ dans la cloche de scaphandre en fonction de ΔP et du rapport e/R . On assimilera la cloche à une sphère creuse à paroi mince, ce qui permet de supposer les contraintes comme homogènes dans la pièce.

- Donnez l'expression de la probabilité de rupture en fonction de l'épaisseur e de verre de la cloche. Quelle est la valeur minimale de e en dessous de laquelle cette méthode n'est pas applicable. (A.N. $R=200$ mm).
- A.N. calculez alors l'épaisseur de verre e au dessus de laquelle la probabilité de rupture sera inférieure à 10^{-6} .
- Calculez alors la taille du défaut critique qui conduirait à la rupture du scaphandre. Que penser du critère de fuite avant rupture ?

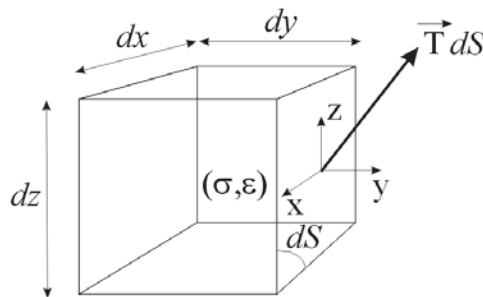
8 ANNEXES

8.1 Quelques rappels de mécanique des milieux continus.

Il s'agit ici de rappeler quelques notions de mécanique des milieux continus, dont nous aurons besoin dans ce cours. Pour le reste, il est fortement conseillé de se reporter au cours de MMC.

8.1.1 Tenseur des contraintes

On se donne un petit volume de matière dV . On suppose, dans le cadre de ce cours, qu'il ne possède pas de mouvement de solide rigide (rotation ou déplacement global significatif) et qu'en outre ses déformations sont très petites. On lui attache donc **un repère cartésien fixe $(0, x, y, z)$** .



On définit alors la contrainte σ qui s'exerce sur cet élément de volume de la façon suivante : si \vec{T} est la force par unité de surface qui s'exerce sur l'une de ses faces de normale \vec{n} , alors $\underline{\underline{\sigma}}$ est tel que :

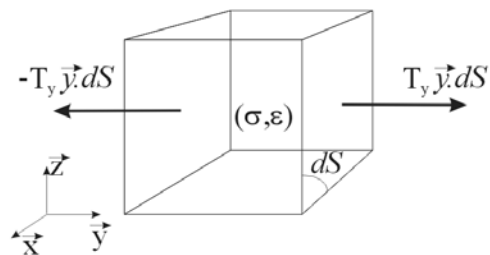
$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}$$

T étant un vecteur « force par unité de surface » à trois composantes, et la normale à la face du volume étant un vecteur directeur à trois composantes, $\underline{\underline{\sigma}}$ est un opérateur 3x3, appelé **tenseur des contraintes**, dont les composantes sont des efforts par unité de surface.

◇ *Exemple n°1 : traction simple*

Si un cube de matière est en équilibre sous un effort par unité de surface T_y appliqué sur sa face droite et dirigé selon la direction y et sous un effort par unité de surface $-T_y$ appliqué sur sa face gauche et dirigé selon la direction y , et qu'aucun autre effort ne s'exerce sur l'élément de volume, alors le tenseur des contraintes s'écrira :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = T_y \vec{y} \otimes \vec{y}$$



On peut ainsi utiliser soit la notation matricielle, en précisant dans quelle base sont exprimées les composantes du tenseur, soit la notation tensorielle qui est telle que, soit trois vecteurs quelconques $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, le tenseur noté $\vec{a} \otimes \vec{b}$ est un opérateur linéaire tel que, si on l'applique à un vecteur \vec{c} quelconque le résultat obtenu est le produit scalaire des vecteurs \vec{b} et \vec{c} porté par le vecteur \vec{a} , soit :

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad (\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

◇ Exemple n°2 : cisaillement

Si le volume de matière est en équilibre sous un effort par unité de surface T_z dirigé sur sa face droite selon la direction z et sur sa face gauche selon la direction $-z$, et qu'aucun autre effort ne s'exerce sur l'élément de volume, alors un couple dirigé selon la direction x apparaît.

On fait l'hypothèse, en mécanique des milieux continus, que l'on ne transmet pas de couple à l'échelle de l'élément de volume. Cela impose que le tenseur des contraintes soit symétrique. Dans notre cas particulier, des efforts s'exercent donc sur les faces de normale z , et le tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_z \\ 0 & T_z & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = T_z (\vec{y} \otimes \vec{z} + \vec{z} \otimes \vec{y})$$

◇ Cas général

Pour un chargement quelconque de l'élément de volume, le tenseur des contraintes s'écrit de la façon suivante, en notation matricielle ou tensorielle :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

ou

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx} (\vec{x} \otimes \vec{x}) + \sigma_{yy} (\vec{y} \otimes \vec{y}) + \sigma_{zz} (\vec{z} \otimes \vec{z}) + \sigma_{xy} (\vec{x} \otimes \vec{y} + \vec{y} \otimes \vec{x}) + \sigma_{xz} (\vec{x} \otimes \vec{z} + \vec{z} \otimes \vec{x}) + \sigma_{yz} (\vec{y} \otimes \vec{z} + \vec{z} \otimes \vec{y})$$

Alors l'effort s'exerçant sur une facette quelconque de normale \vec{n} et de surface dS se calcule comme suit :

$$\vec{F}_{ndS} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} dS = dS \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ndS} &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} dS = (\bar{x} \cdot \vec{n}) \sigma_{xx} dS \bar{x} + (\bar{y} \cdot \vec{n}) \sigma_{yy} dS \bar{y} + (\bar{z} \cdot \vec{n}) \sigma_{zz} dS \bar{z} \\ &+ \sigma_{xy} dS ((\bar{y} \cdot \vec{n}) \bar{x} + (\bar{x} \cdot \vec{n}) \bar{y}) + \sigma_{xz} dS ((\bar{z} \cdot \vec{n}) \bar{x} + (\bar{x} \cdot \vec{n}) \bar{z}) \\ &+ \sigma_{yz} dS ((\bar{y} \cdot \vec{n}) \bar{z} + (\bar{z} \cdot \vec{n}) \bar{y}) \end{aligned}$$

8.1.2 Tenseur des déformations

On définit également la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ de l'élément de volume de la façon suivante. Si \vec{u} est le champ de déplacement des points de la matière entre un état initial et un état actuel infiniment proche :

$$\vec{u} = u_x(x, y, z) \bar{x} + u_y(x, y, z) \bar{y} + u_z(x, y, z) \bar{z}$$

Alors, la déformation de la matière entre l'état initial et l'état actuel, se calcule de la façon suivante dans un repère cartésien :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \vec{u} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{u}^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

◇ Exemples :

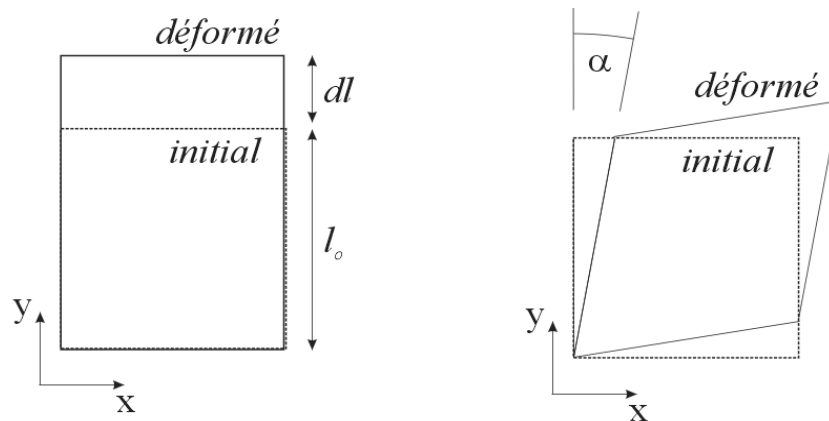


Figure 129 : élongation simple à gauche et cisaillement simple à droite.

Cas de l'élongation simple

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dl}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \frac{dl}{l_0} \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y$$

Cas du cisaillement simple

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \alpha (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x)$$

8.1.3 Puissance de déformation

On peut alors calculer la densité volumique de puissance des efforts appliqués à un élément de volume dV comme la trace du produit du tenseur des contraintes par le tenseur des vitesses de déformation (voir cours de MMC ou faire un bilan de puissance sur un cube) :

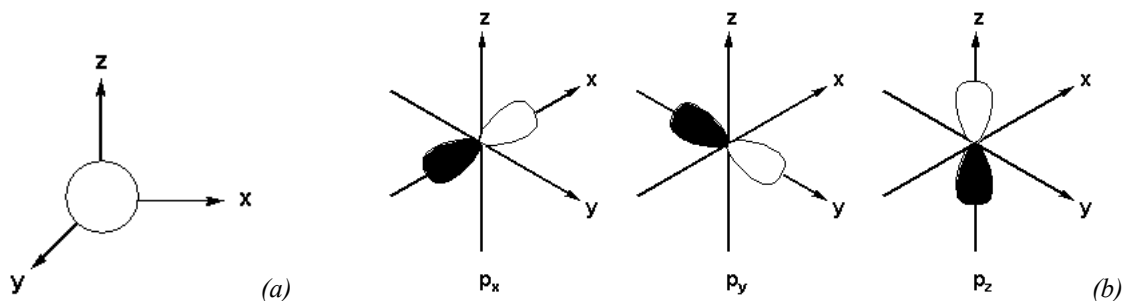
$$P_{ext} = Tr \left(\underline{\underline{\sigma}} \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}}{dt} \right)$$

8.2 Quelques rappels de physique.

◇ Orbitales atomiques

L'atome est constitué d'un noyau (neutrons et de protons) et d'électrons chargés négativement. Le numéro atomique Z représente le nombre de protons et d'électrons dans le noyau.

Autour d'un noyau existent des régions appelées orbitales dans lesquelles un électron a une probabilité de 95 % de se trouver. Les orbitales ont des formes différentes selon le nombre quantique λ qui les caractérise (orbitales s, p, d, f). Le nombre quantique magnétique m détermine la direction de l'orbitale.



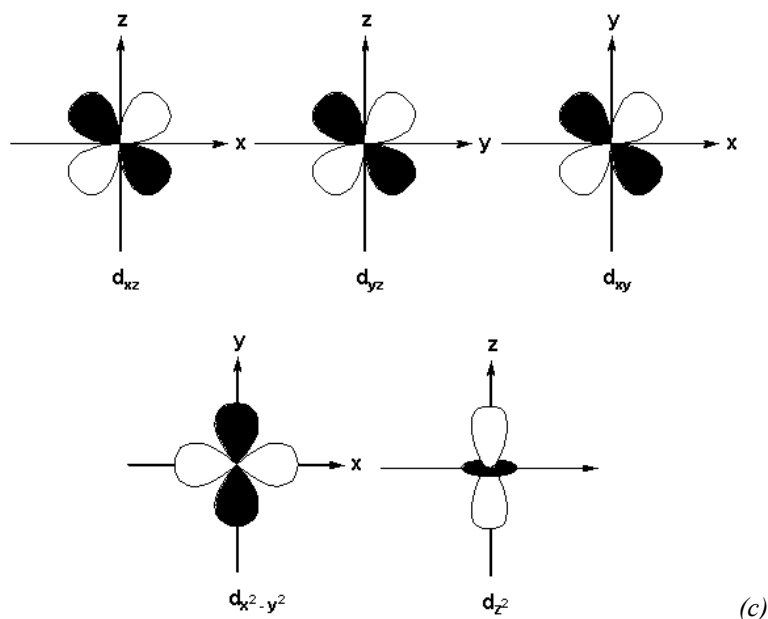


Figure 130 (a) Les orbitales s : $\lambda = 0$ et $m = 0$, contiennent jusqu'à 2 électrons (b) Les orbitales p : $\lambda = 1$ et $m = -1, 0, +1$, contiennent jusqu'à 6 électrons (c) Les orbitales d : $\lambda = 2$ et $m = -2, -1, 0, +1, +2$ contiennent jusqu'à 10 électrons

Les orbitales représentées sur la Figure 130 se déforment lorsque se forme une liaison. Dans les cristaux métalliques, les orbitales extérieures des atomes coalescent pour former une orbitale continue dans tout le cristal. Cette continuité permet aux électrons de se déplacer dans tout le cristal, ce qui donne aux métaux leur caractère conducteur.

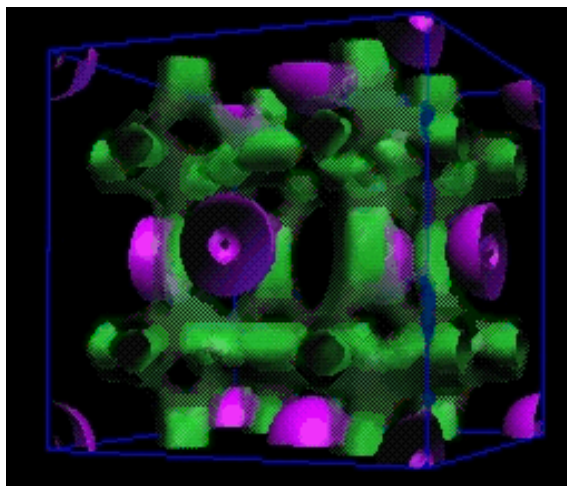


Figure 131 : Orbitales dans un cristal d'Aluminium. Les orbitales externes des atomes d'Al ont coalescé lors de la formation du cristal ce qui conduit à un domaine de présence pour l'électron continu à travers tout le cristal, ce qui lui donne son caractère conducteur (<http://www.lct.jussieu.fr/silvi/metal.html>).

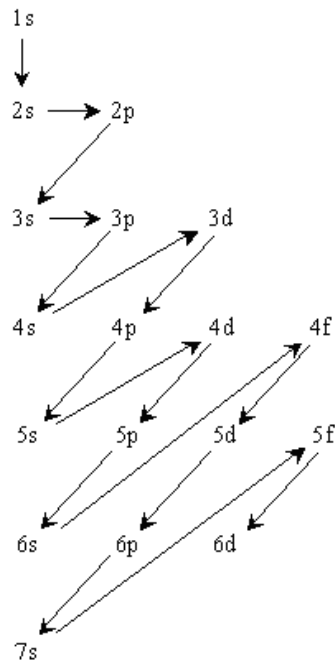
◇ Règle de remplissage des orbitales atomiques

Si le numéro atomique de l'élément est Z , il faut distribuer Z électrons sur les différentes orbitales autour du noyau.

Règle 1) dans une orbitale, deux électrons seulement peuvent coexister, celui de spin $+1/2$ et celui de spin $-1/2$.

Règle 2) Les orbitales s contiennent 2 électrons au plus, les orbitales p six électrons au plus, et les orbitales d 10 électrons au plus.

Règle 3) Les orbitales sont remplies dans l'ordre suivant (règle de Klechkowski)



Règle 4) un couple d'électrons de spins opposés est plus stable qu'un couple d'électrons de même spin.

Règle 5) une orbitale pleine est plus stable qu'une orbitale partiellement remplie.

Notation) On décrit la structure électronique d'un atome, comme suit, d'abord le numéro de la couche, ensuite la lettre caractérisant l'orbitale (s,p, d, ou f) et enfin le nombre d'électrons dans cette orbitale. Ainsi pour un atome de numéro atomique $Z=11$, aura-t-on la structure suivante ($1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$)

◇ *Table de Mendeleev.*

La table de Mendeleev permet de classer les éléments selon leurs propriétés chimiques. On y distingue essentiellement :

Des lignes horizontales appelées périodes dans lesquelles les éléments sont disposés de gauche à droite selon l'ordre croissant de leur numéro atomique Z .

Des colonnes verticales qui correspondent à des "familles" ou des groupes chimiques, les éléments définis par une colonne possèdent une configuration électronique identique de leur couche externe et donc des propriétés chimiques voisines.

		Groupes																	
		1											13	14	15	16	17	18	
		s1											p1	p2	p3	p4	p5	p6	
Périodes	1	1 H 1.008											13 B 10.81	14 C 12.01	15 N 14.01	16 O 16.00	17 F 19.00	18 He 4.003	
	2	3 Li 6.941	4 Be 9.012											5 B 10.81	6 C 12.01	7 N 14.01	8 O 16.00	9 F 19.00	10 Ne 20.18
	3	11 Na 22.99	12 Mg 24.31	3 d1	4 d2	5 d3	6 d4	7 d5	8 d6	9 d7	10 d8	11 d9	12 d10	13 Al 26.98	14 Si 28.09	15 P 30.97	16 S 32.07	17 Cl 35.45	18 Ar 39.95
	4	19 K 39.10	20 Ca 40.08	21 Sc 44.96	22 Ti 47.88	23 V 50.94	24 Cr 52.00	25 Mn 54.94	26 Fe 55.85	27 Co 58.93	28 Ni 58.69	29 Cu 63.55	30 Zn 65.39	31 Ga 69.72	32 Ge 72.59	33 As 74.92	34 Se 78.96	35 Br 79.90	36 Kr 83.80
	5	37 Rb 85.47	38 Sr 87.62	39 Y 88.91	40 Zr 91.22	41 Nb 92.91	42 Mo 95.94	43 Tc (98)	44 Ru 101.1	45 Rh 102.9	46 Pd 106.4	47 Ag 107.9	48 Cd 112.4	49 In 114.8	50 Sn 118.7	51 Sb 121.8	52 Te 127.6	53 I 126.9	54 Xe 131.3
	6	55 Cs 132.9	56 Ba 137.3	57 La *138.9	72 Hf 178.5	73 Ta 180.9	74 W 183.9	75 Re 186.2	76 Os 190.2	77 Ir 190.2	78 Pt 195.1	79 Au 197.0	80 Hg 200.5	81 Tl 204.4	82 Pb 207.2	83 Bi 209.0	84 Po (210)	85 At (210)	86 Rn (222)
	7	87 Fr (223)	88 Ra (226)	89 Ac ~(227)	104 Rf (257)	105 Db (260)	106 Sg (263)	107 Bh (262)	108 Hs (265)	109 Mt (266)	110 Ds (271)	111 Uuu (272)	112 Uub (277)						

Figure 132 : Tableau périodique des éléments (Los Alamos National Laboratory's Chemistry Division.)

8.3 Le facteur d'intensité des contraintes

Le facteur d'intensité des contraintes a été introduit par Irwin [Irwin,1957] en utilisant la méthode de résolution de Weestergaard [Westergaard,1939] et les travaux de mathématiciens soviétiques comme Mushkevichvili. Un calcul approché avait été effectué auparavant par Williams qui permet de généraliser la forme de la solution à toute géométrie de fissure [Williams, 1952].

8.3.1 Méthode de résolution de problèmes plans en élasticité isotrope.

En élasticité plane, le tenseur des contraintes ne contient que trois inconnues, σ_{xx} , σ_{xy} et σ_{yy} . Le tenseur des contraintes recherché doit satisfaire l'équilibre des efforts :

$$\overrightarrow{Div} \underline{\underline{\sigma}} + \overrightarrow{f}_v = \rho \vec{a}$$

Si le problème est statique, si les forces de volume sont négligeables, et pour un problème plan (x,y) l'équilibre se traduit donc par deux équations sur les termes du tenseur des contraintes :

$$\overrightarrow{Div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \Leftrightarrow_{2D} \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

En petites déformations, le champ de déplacement (u) permet de définir le tenseur des déformations (ε) et d'en déduire les équations de compatibilité entre les termes de ce tenseur :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^T) \xrightarrow{2D} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

L'équation de compatibilité des déformations permet de déduire une troisième équation sur les termes du tenseur des contraintes en utilisant la loi de comportement pour l'élasticité isotrope.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \\ + \text{Loi de Hooke} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{Tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$$

Le problème comporte donc trois fonctions inconnues (σ_{xx} , σ_{yy} , et σ_{xy}) et trois équations différentielles à deux variables spatiales (x et y). La fonction d'Airy (F), permet de le ramener à un problème comportant une seule inconnue (F) et une seule équation différentielle à deux variables spatiales (x et y). Si F est choisie telle que :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \text{ et } \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \text{ et } \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Rightarrow \left\{ 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0} \right\}$$

Les deux équations d'équilibre sont automatiquement vérifiées par le choix même de la fonction F et l'équation de compatibilité devient une équation biharmonique. On peut encore simplifier le problème en introduisant une variable complexe $z=x+iy$, et une fonction complexe $Z(z)$. On remarque alors que :

$$z = x + iy \text{ et } Z = f(z) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = Z^{(1)} \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = iZ^{(1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = Z^{(4)} \\ \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} = -Z^{(4)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = 0 \quad \forall Z = f(z)$$

On montre ainsi que si la fonction d'Airy F est exprimée comme une combinaison de parties réelles et imaginaires de Z, xZ ou yZ , alors l'équation bi-harmonique est toujours vérifiée. La difficulté se réduit maintenant à trouver la fonction complexe Z, d'une unique variable complexe z, qui vérifie toutes les conditions aux limites et de symétrie du problème.

8.3.2 Fonction de Westergaard.

La fonction de Westergaard [Westergaard, 1939] s'applique à des problèmes qui présentent une symétrie par rapport à $x=0$ et $y=0$. C'est bien le cas de la fissure de Griffith. A l'infini :

$$\sigma_{\infty} = S(\bar{e}_x \otimes \bar{e}_x + \bar{e}_y \otimes \bar{e}_y) \quad \text{Avec l'expression de F : } \begin{cases} S = \frac{\partial^2 F_{\infty}}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial^2 F_{\infty}}{\partial x \partial y} \\ S = \frac{\partial^2 F_{\infty}}{\partial x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{\infty} = S \frac{y^2}{2} + f_1(x)y + f_2(x) \\ F_{\infty} = h_1(y)y + h_2(x) \\ F_{\infty} = S \frac{x^2}{2} + g_1(y)x + g_2(y) \end{cases}$$

Ceci implique que : $F_{\infty} = S \frac{x^2 + y^2}{2} + c_1 x + c_2 y + c$, où c_1 , c_2 et c sont des constantes.

Mais compte tenu de la symétrie par rapport à $x=0$ et $y=0$, c_1 et c_2 sont nulles et : $F_{\infty} = S \frac{x^2 + y^2}{2} + c$

Il faut maintenant exprimer la condition de chargement biaxial à l'infini sous la forme d'une condition aux limites pour Z .

$$\text{Posons : Si } Z_{\infty} = S \frac{z^2}{2} + c, \Rightarrow Z_{\infty} = S \frac{x^2 - y^2}{2} + c + i.Sxy \quad \text{et} \quad y \frac{\partial Z_{\infty}}{\partial y} = -Sy^2 + iSxy$$

$$\text{Avec } F = \text{Re}(Z) + y \text{Im}(Z^{(1)}) \text{ alors } F_{\infty} = \text{Re} \left[Z_{\infty} - y \frac{\partial Z_{\infty}}{\partial y} \right] = S \frac{x^2 + y^2}{2} + c$$

Avec l'expression des termes du tenseur des contraintes en fonction de F , et cette expression de F en fonction de Z , le problème s'écrit, en éliminant F :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \text{Re} Z^{(2)} - y \text{Im} Z^{(3)} \\ \sigma_{yy} = \text{Re} Z^{(2)} + y \text{Im} Z^{(3)} \\ \sigma_{xy} = -y \text{Re} Z^{(3)} \end{cases} \quad \text{et} \quad Z_{\infty}^{(1)} = Sz$$

Cette solution est applicable à tout problème plan quasistatique et en élasticité infinitésimale isotrope, présentant une symétrie par rapport à $x=0$ et à $y=0$.

8.3.3 Singularité en pointe de fissure.

On dispose désormais d'une expression des contraintes en fonction de Z et de la condition aux limites pour Z à l'infini. Il reste maintenant à introduire la ou les fissures avec une symétrie par rapport à x et y .

Dans le cas de la fissure de Griffith (Figure 4.1), le champ de contrainte présente deux singularités aux deux extrémités de la fissure. C'est à dire en $y=0$ et $x=-a$ et en $y=0$ et $x=a$, soit en $z=a$ et $z=-a$. Il vient que les dérivées seconde et troisième de Z ont en facteur le terme $(z^2 - a^2)^{\beta}$, où β est négatif. De plus, la valeur à l'infini de Z permet de définir les degrés en z de $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ et $Z^{(3)}$. Si l'on pose :

$$Z^{(1)} = S\sqrt{z^2 - a^2} \quad \text{alors} \quad Z_{\infty}^{(1)} = Sz \quad \text{et} \quad Z^{(2)} = \frac{Sz}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad \text{et} \quad Z^{(3)} = \frac{-Sa^2}{(\sqrt{z^2 - a^2})^3}$$

Cette solution vérifie les conditions aux limites à l'infini (z grand devant a) et présente deux singularités en $z=a$ et $z=-a$. Comme on connaît l'expression des composantes du tenseur des contraintes en fonction de Z , on dispose d'une expression exacte du champ de contrainte dans la plaque infinie percée d'une fissure de Griffith centrale. On trouve de la même manière les solutions pour d'autres problèmes de fissures avec une symétrie par rapport à $x=0$ et $y=0$. Une plaque multifissurée, par exemple.

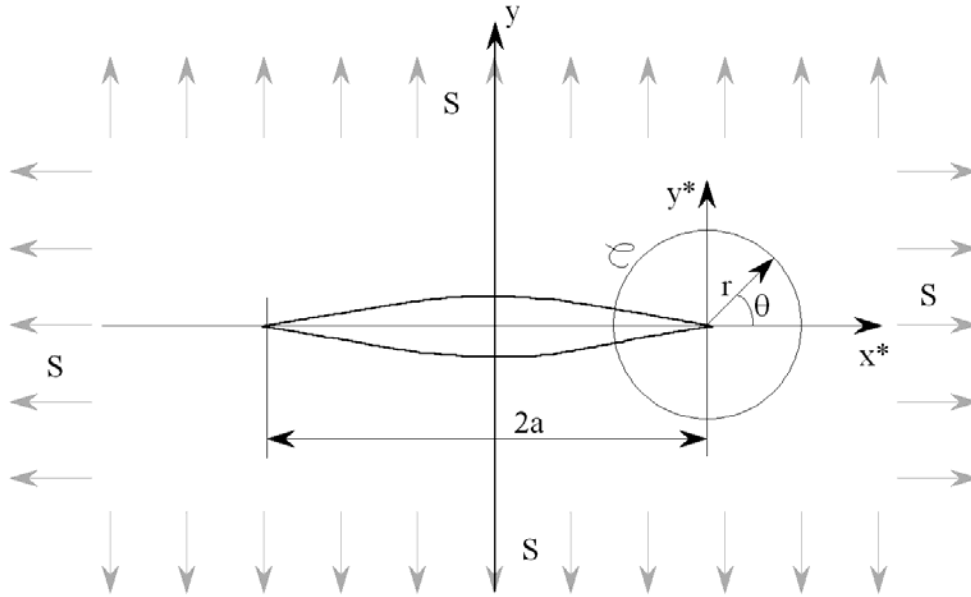


Figure 4.1: Fissure de Griffith et changement de coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques centrées sur l'une des pointes de la fissure

Pour établir un critère de rupture [Irwin, 1957], il faut maintenant isoler la région à l'extrémité de la fissure. Pour cela, on effectue un changement de variable de façon à se placer en coordonnées polaires, autour de l'une des deux extrémités de la fissure [Irwin, 1957] (Figure 4.1) et un développement asymptotique au premier ordre :

$$\left. \begin{array}{l} z = a + r.e^{i\theta} \\ r \ll a \end{array} \right\} \Rightarrow Z^{(2)} = S \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} . e^{-i\theta/2} \quad \text{et} \quad Z^{(3)} = -\frac{S}{r} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} . e^{-i3\theta/2}$$

Il suffit d'exprimer les composantes du tenseur des contraintes, pour en déduire les champs de contrainte à l'extrémité de la fissure. On introduit aussi, historiquement, le périmètre du contour $C : (2\pi r)$. Si le chargement, biaxial à l'infini, présente des intensités différentes dans les deux directions principales x et y , le résultat dérive du calcul ci-dessus par superposition. En effet, la composante selon $\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x$ ne se projette sur aucun mode de fissuration et n'interfère donc pas avec la fissure. L'expression de la solution asymptotique pour les contraintes à l'extrémité de la fissure est donc, après développements, pour un chargement biaxial à l'infini :

$$\text{Si } \sigma_{\infty} = S_x \cdot \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x + S_y \cdot \bar{e}_y \otimes \bar{e}_y \Rightarrow \sigma_{\infty} = S_y \cdot (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_y + \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x) + (S_x - S_y) \cdot \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x$$

$$\text{alors : } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{S_y \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + (S_x - S_y) \\ \sigma_{yy} = \frac{S_y \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} = \frac{S_y \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases}$$

8.3.4 Facteur d'intensité des contraintes.

La propriété remarquable de cette solution est que le **même** terme amplificateur $(S_y(\pi a)^{1/2})$ apparaît dans **toutes** les composantes du tenseur des contraintes. Si $|S_x - S_y| \ll S_y \sqrt{\pi a}$, la forme du champ des contraintes et des déformations à l'extrémité de la fissure est donc indépendante de la géométrie de la fissure et des contraintes appliquées sur la structure. Seule l'intensité de ces champs en dépend. Les critères de rupture peuvent donc s'écrire en fonction d'une seule quantité mécanique, le facteur d'intensité des contraintes [Irwin, 1957]. C'est un résultat important, puisque le nombre de paramètres d'un critère (et donc le nombre d'essais de caractérisation nécessaires) est a priori une fonction puissance du nombre de variables qui interviennent dans le critère.

Pour la fissure de Griffith, le facteur d'intensité des contraintes K (ici en mode I) et la contrainte T, sont définis

$$\text{de la façon suivante } \begin{cases} K_I = S_y \sqrt{\pi a} \\ T = S_x - S_y \end{cases}$$

Et dans le cas général, le champ de contrainte à l'extrémité de la fissure s'écrit, en mode I :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + T \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned}$$

Les solutions analytiques pour les trois modes ont été déterminées de manière similaire. En contraintes planes $\sigma_{zz}=0$ et $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ et en déformations planes $\sigma_{zz}=\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$ et $\kappa=3-4\nu$. (Les expressions du facteur d'intensité des contraintes pour un grand nombre de géométries et de cas de chargement des fissures peuvent être trouvées dans les ouvrages de Tada, Paris et Irwin. [Tada,1985] et de Murakami [Murakami,1987]).

Solution asymptotique en mode I

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) & u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) & u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}$$

Solution asymptotique en mode II

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) & u_x &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & u_y &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

Solution asymptotique en mode III

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} & u_z &= \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} &= 0\end{aligned}$$

8.3.5 Quelques expressions du facteur d'intensité des contraintes.

On donne ci-dessous l'expression du facteur d'intensité des contraintes en fonction de la longueur de la fissure et du chargement pour quelques géométries classiques d'éprouvettes.

◇ *Eprouvette CCT : center cracked tension (Figure 133)*

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \frac{1 - 0.025 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{b} \right)^4}{\sqrt{\cos \left(\frac{\pi a}{2b} \right)}}$$

◇ *Eprouvette DENT : double edge noched tension (Figure 133)*

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \frac{1.122 - 0.561 \left(\frac{a}{b} \right) - 0.205 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 0.471 \left(\frac{a}{b} \right)^3 - 0.190 \left(\frac{a}{b} \right)^4}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}}$$

◇ *Eprouvette SENT : single edge noched tension (Figure 133)*

L'éprouvette est soumise à un effort axial F par unité d'épaisseur et à un couple par unité d'épaisseur M . Dans l'éprouvette non fissurée la contrainte est maximale sur la face gauche et minimale sur la face droite et varie linéairement entre ces deux points. On a alors :

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{2b} + \frac{6M}{b^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{\min} = \frac{F}{2b} - \frac{6M}{b^2}$$

Alors le facteur d'intensité des contraintes se calcule comme suit :

$$K_I = K_I^F + K_I^M$$

Avec

$$K_I^F = \sigma\sqrt{\pi a} \left(1.122 - 0.231\left(\frac{a}{2b}\right) + 10.55\left(\frac{a}{2b}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{2b}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{2b}\right)^4 \right)$$

Et

$$K_I^M = \sigma\sqrt{\pi a} \left(1.122 - 1.4\left(\frac{a}{2b}\right) + 7.33\left(\frac{a}{2b}\right)^2 - 13.08\left(\frac{a}{2b}\right)^3 + 14.0\left(\frac{a}{2b}\right)^4 \right)$$

Ces formules sont correctes à 5% près de $a=0$ jusqu'à $a=1.2b$.

◇ *Calcul par superposition (Figure 133)*

Si maintenant le champ de contrainte dans l'éprouvette non fissurée prend une forme plus complexe, on peut alors calculer le facteur d'intensité des contraintes en utilisant le principe de superposition.

Supposons un chargement de forme complexe $\sigma_{yy}(x)$ dans l'éprouvette non-fissurée.

Alors un point à la distance c de la surface de l'éprouvette non-fissurée, situé sur le plan où se trouverait la fissure si l'éprouvette était fissurée, est soumis à un effort P par unité d'épaisseur $P = \sigma_{yy}(c)dc$

Le facteur d'intensité des contraintes correspondant se calcule comme suit :

$$dK_I(c) = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} \left(\frac{3.52\left(1-\frac{c}{a}\right)}{\left(1-\frac{a}{2b}\right)^{3/2}} - \frac{\left(4.35-5.28\frac{c}{a}\right)}{\left(1-\frac{a}{2b}\right)^{1/2}} + \left\{ \frac{1.30-0.30\left(\frac{c}{a}\right)^{3/2}}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}} + 0.83 - 1.76\frac{c}{a} \right\} \left\{ 1 - \frac{a}{2b}\left(1-\frac{c}{a}\right) \right\} \right)$$

Alors le facteur d'intensité des contraintes pour le champ de contrainte complexe se calcule comme suit :

$$K_I = \int_{c=0}^{c=a} dK_I(c)dc$$

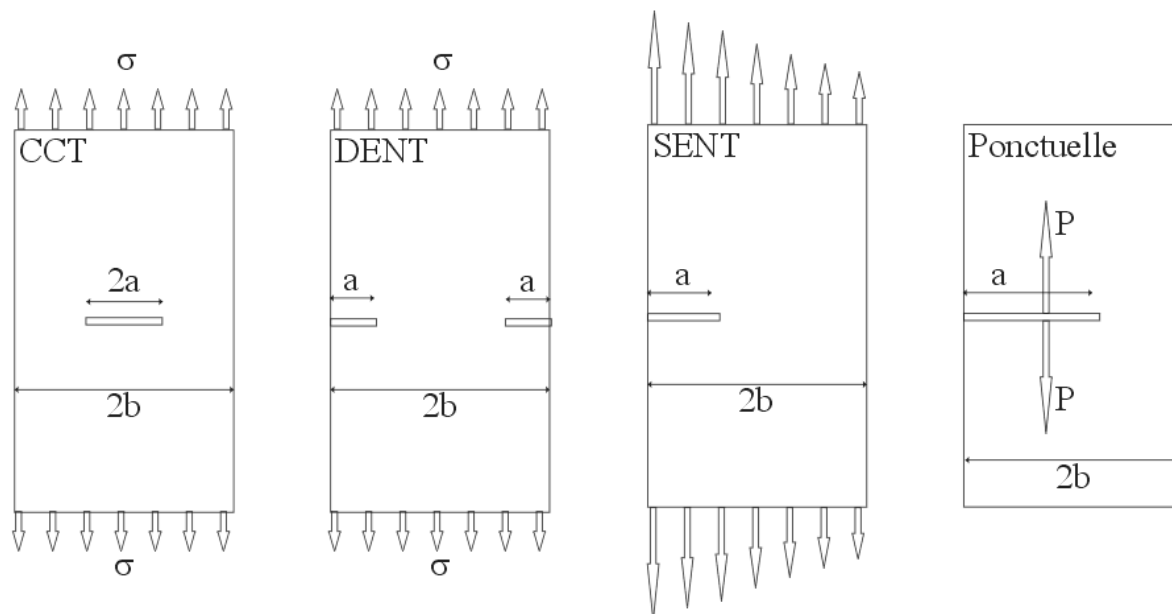


Figure 133 : Quelques géométries de structures fissurées (CCT) center cracked tension, (DENT) double edge notched tension, (SENT) single edge notched tension, la dernière permet par superposition de calculer des cas de chargement plus complexes.